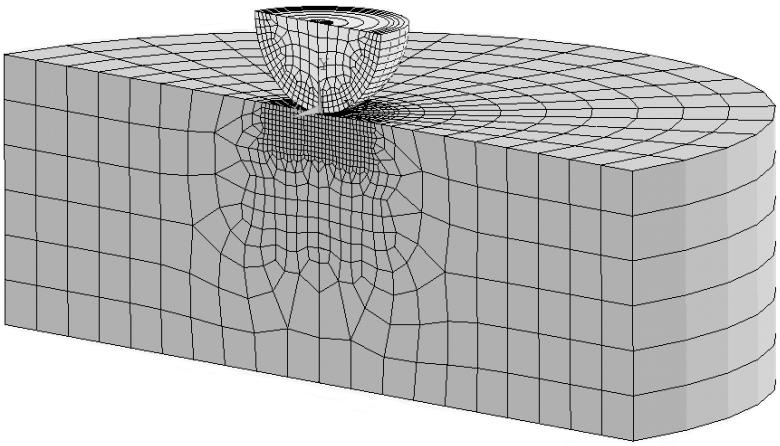
圧子力学

－ミクロ・ナノ領域における材料物理学－

（改訂第 3 版）



逆井　基次

圧子力学

— ミクロ・ナノ領域における材料物理学 —

逆井　基次
豊橋技術科学大学

緒言

ミクロ・ナノ領域における材料物性(弾性，塑性，粘弾性)の計測・評価と，これに基づく微構造設計に資する材料物理学的な基礎を体系的に論じることが本書執筆の目的である。

「ビッカース硬度(Vickers hardness)」に代表される工業材料の硬度測定では，ダイヤモンドを始めとする高硬度材料を機械加工することより作製したピラミッド形状あるいは球形状の微小圧子を材料表面に圧入し，圧入時の最大荷重と徐荷後に材料表面に形成された圧痕寸法から硬度(contact hardness)を算出する。硬度の概念およびその実験的な計測の歴史は古く 19 世紀にまで遡る。20 世紀に入り E. Meyer，L. Prandtl，D. Tabor 等は「硬度」が延性の著しい金属材料の「塑性(降伏強度)」を表現する定量的尺度となることを明らかにした。しかし，その後に著しい発展を遂げた高分子材料やセラミック材料では，圧子圧入に伴う粘性流動あるいは弾性変形の寄与が大きく，圧入荷重と圧痕寸法から算出される硬度の材料物理学的解釈は未だ確立されていない。後に本書で詳述するように，高分子材料やセラミック材料の圧子圧入硬度は「塑性」を表す尺度では決してない。

20 世紀後半に入ると電子工学・コンピュータサイエンスに基礎をおく電子計測技術の発展により，ミクロ・ナノ領域での材料物性計測の必要性とこれに関わる計測技術が著しい発展を遂げる。このような歴史的背景のもと，微小圧子の圧入と徐荷に伴う力学過程を時系列で同時計測しミクロ・ナノ力学物性を定量評価する科学と工学の「学問」，すなわち「圧子力学(Indentation Contact Mechanics)」が体系化されつつある。

1882 年，弱冠 24 歳の Heinrich Hertz が公表した論文 *On the contact of elastic solids* が現在の圧子力学の根幹をなしている。彼は対面する二つの凸レンズを接触したときに生ずるニュートンリングが接触力の強弱に伴い変化する現象に興味を持ち，専門としていた電磁気学におけるポテンシャル理論と弾性理論の類似性に着目し，レンズの弾性変形に関係づけてニュートンリングとレンズ接触力との関係を理論的に論じた。その後，Hertz 理論は 19 世紀末から著しい発展を遂げた鉄道車両技術における車輪とレール間の接触問題やベアリングの接触問題等を論じる「接触力学(Contact Mechanics)」の基礎を与え近代工学に多大なる貢献をしてきた。

K.L. Johnson の“Contact Mechanics”は接触力学を体系的に論じた世界的な名著であり，Hertz 理論を含む多くの接触問題に関する力学を体系的に論じている。しかしながら，接触に伴う変形・流動の物理過程を論じていないため，接触力学を材料の力学物性に関連付ける考察が欠落している。一方，D. Tabor の“Hardness of Metals”では力学物性としての「硬度」を弾性・塑性に着目して論じた名著ではあるが，金属材料の物性に力点が置かれているため，20 世紀後半から著しい発展を遂げつつある高分子材料，セラミック材料，さらには金属材料を含む各種材料の組み合わせにより作製される機能材料・複合材料のミクロ・ナノ領域での力学物性の評価に関する考察が欠落している。

1980 年代に入るとミクロ・ナノ領域における力学物性定量を目的とした，いわゆる計装化インデンテーション計測装置の開発が進み，多くの汎用装置が市販され現在に至っている。これらの汎用装置では圧子荷重と圧入深さの関係を時系列で定量計測することができる。しかし，圧子と材料表面との微視的接触状況，すなわち，接触面積を定量計測することができないため，弾性・塑性や粘弾性関数等の力学物性を定量評価するに当たっては各種の仮定・近似を用いる必要がある。このために，これらの汎用装置で評価される各種物性値の精度や信頼性には多くの問題があり解決しなければならない課題も多い。

上述した二つの計測情報，すなわち，「圧子荷重」と「圧入深さ」のみでは，圧子圧入に伴い生じる材料表面の変形，そしてこの表面変形能に関与する各種力学物性値を厳密に定量記述することはできない。圧入に伴う表面変形から力学物性を定量評価するためには，圧入深さ（圧子圧入により生じる窪みの深さ)のみならず，圧入方向に直交する材料自由表面に沿った窪みの広がり(圧子接触面積)の情報が不可欠となる。換言すると，材料の力学物性を直接反映する「圧入抵抗」の定量記述には，「圧入深さ」の計測に加え，圧子・材料表面間に形成される接触面積で圧入荷重を除した値，すなわち，「接触面圧(圧子圧入への反作用応力)」の定量計測が不可欠となる。本書で紹介・詳述する「計装化顕微インデンテーション計測装置」は，このような考えに基づき開発された計装化装置であり，圧子圧入荷重･圧入深さの計測と同時に各圧入深さでの圧子/材料表面間接触面積を定量計測することができる。さらには，時間の関数として圧子接触面積をプログラミングすることにより，複雑な時間・刺激速度依存性に対する粘弾性応答を定量解析することもできる。

弾性体，弾塑性体，粘弾性体，並びにこれらの材料を組み合わせることにより作製された機能材・複合材の圧子力学とその材料物理学に付いて論じた専門書類の出版は，筆者の知るところ，国内外ともに皆無と言える。このような現状を鑑み，さらには近年におけるミクロ・ナノ領域における科学と工学の著しい発展に資することを目的に本書の執筆を試みた。材料力学の立場から，平易かつ厳密に圧子力学理論を展開すると共に，材料物理学の観点から圧子力学物性の実験計測・データ解析・評価にも力点を置いた。本書では，前半(第 1 章～第 9 章)において圧子の材料表面への負荷と徐荷に伴う力学過程に焦点を当てた圧子力学理論を詳述する。続く後半(第 10 章～第 12 章)では，これらの圧子力学理論を視覚的に捉えることを目的とした有限要素数値解析，計測装置の詳細，そして各種実用工業材料の力学物性(弾性，塑性，粘弾性)の実験的評価・解析への圧子力学理論の適用について論じる。

筆者が在籍した豊橋技術科学大学における多くの共同研究者・学生の協力がなければ本書の執筆は不可能であり，諸氏に深謝する。特に，世界に先駆けて，圧子接触面積の定量計測を可能とした計装化顕微インデンテーション計測装置の設計・開発に多大の貢献をした宮島達也博士(現，国立研究開発法人産業技術総合研究所)の功績は大きく，彼の協力なくして本書を完成させることは不可能であり，ここに深く感謝する。本書で繰り返し強調しているように，圧子接触面積の定量計測はミクロ・ナノ領域における各種の力学物性を

仮定・近似を一切用いることなく定量評価する上で極めて重要となる。実験および理論の両面から圧子力学を一つの学問として体系化していく上で，計装化顕微インデンテーション計測装置の役割は大きい。

本書の改訂にあたって旧版を精査し誤記訂正ならびに論旨の修正に多大の労を頂いた宮島達也博士に深謝する。

(2020 年 1 月)

目次

1. 変形の定量記述 -歪と応力- 1
2. 完全弾性体の力学 6
   2.1 完全弾性体の構成方程式 6
   2.2 平面歪問題 8
   2.3 軸対称問題 10
   2.4 軸対称問題における重調和方程式の解法 -Hankel 変換の適用- 13
3. 完全弾性体の圧子力学 17
   3.1 平端円柱圧子 19
   3.2 球形圧子(Hertz 接触問題) 20
   3.3 円錐圧子 22
4. 塑性発現規範と圧子接触問題 25
   4.1 最大ずり応力規範 (Tresca Criterion) 26
   4.2 最大ずり歪エネルギー規範 (von Mises Criterion) 27
   4.3 球形圧子接触と塑性の発現 28
5. 弾塑性圧子力学 30
   5.1 Meyer 硬度の材料物理学 30
      (1) Cavity モデル 34
      (2) 排除体積加成則モデル 35
   5.2 円錐圧子の P -h 負荷徐荷履歴曲線 40
      (1) 圧入仕事 WOI (Work-of-Indentation) 42
      (2) ループエネルギーUr と降伏応力 cY 42
6. 線形粘弾性理論 44
   6.1 ガラス転移挙動と粘弾性応答 44
      (1) ガラス転移挙動 44
      (2) Maxwell 粘弾性液体モデルと Zener 粘弾性固体モデル 44
   6.2 微分型粘弾性構成式 -Wiechert モデル- 50
   6.3 積分型粘弾性構成式 -Boltzmann 重畳積分- 52
   6.4 粘弾性応答におけるポアソン比の時間依存性 54
7. 粘弾性圧子力学 57
   7.1 弾性-粘弾性対応原理を用いた粘弾性圧子力学の定式化 57
   7.2 粘弾性 Meyer 硬度 61
   7.3 モデル粘弾性体の圧子力学挙動 62

8. 表面付着力を有するソフトマターの圧子力学 65
8.1 弾性体 65
8.2 弾塑性体 74
8.3 粘弾性体 77
(1) 荷重緩和挙動 (円錐圧子) 77
(2) クリープ変形 (球形圧子) 80
9. 被膜／基材積層複合材の圧子力学 83
9.1 弾性積層複合材の圧子力学挙動 83
9.2 粘弾性積層複合材の圧子力学挙動 93
(1) 弾性皮膜/粘弾性基材複合材の応力緩和挙動 94
(2) 粘弾性皮膜/弾性基材複合材の応力緩和挙動 94
9.3 弾塑性積層複合材の圧子力学 97
10. 数値圧子力学 101
10.1 有限要素法を用いた構造・物性解析の特徴 101
10.2 弾性解析 102
10.3 弾塑性解析 103
(1) P - h 履歴曲線 103
(2) Oliver-Pharr/Field-Swain 近似 106
(3) 歪硬化則 107
(4) 拘束因 c に及ぼす圧子形状および圧子/材料界面摩擦の影響 108
10.4 粘弾性解析 109
10.5 積層複合材への適用 111
11. 圧子力学試験計測装置とデータ解析 113
11.1 汎用ピラミッド圧子 113
11.2 汎用計装化インデンテーション計測装置 114
(1) 装置定数の実験的決定方法 115
(2) 弾塑性力学物性の定量 118
(3) 粘弾性関数の定量 121
11.3 計装化顕微インデンテーション計測装置 124
(1) 装置の基本構造と計測原理 124
(2) 弾塑性力学物性の定量 126
(3) 粘弾性関数の定量 127
12. 圧子力学実測データに基づいた物性論 132
12.1 ピラミッド圧子形状が弾塑性圧子力学応答に与える影響 132
12.2 各種工業材料の圧子力学挙動 134
(1) P -h 負荷徐荷曲線と弾塑性挙動 134

(2) 炭素材料の弾塑性圧子力学挙動 137
(3) 無機ガラスの高温粘弾性解析 140
(4) 顕微インデンテーション計測装置を用いた
非晶質セレンの粘弾性解析 143
(5) 顕微インデンテーション計測装置を用いたポリカーボネート樹脂の
ガラス域における粘弾性圧子力学計測と解析 144
(6) 顕微インデンテーション計測装置を用いた積層複合材の
弾塑性圧子力学 146
(7) 顕微インデンテーション計測装置を用いた
ソフトマターの圧子力学 149

APPENDIX A 円柱座標系における力学変数の記述 153
(1) 変形と歪 153
(2) 力学的平衡方程式 156
APPENDIX B Bessel 関数 158
APPENDIX C Laplace 変換の基礎 160
(1) Laplace 変換の定義 160
(2) Laplace 変換の基本特性 160
(3) 線形刺激応答理論で
有用となる代表的な解析関数の Laplace 変換対応表 161
(4) Laplace 変換の適用例 162
APPENDIX D 緩和時間スペクトルと遅延時間スペクトル 163
APPENDIX E 圧子力学の歴史
(1) 産業革命と熱力学・連続体力学の関わり 165
(2) 産業革命期における硬度計測の役割 165
(3) 押し込み硬度の計測技術と弾塑性圧子力学の歴史 166
(4) 弾性圧子力学，粘弾性圧子力学の理論構築 169

索引 171

記号一覧

A 圧子接触面積

A_{proj} 残留圧痕の投影面積

A_{e} 完全弾性体の圧子接触面積

A_{p} 完全塑性体の圧子接触面積

$A_{\mathrm{ve}}(t)$ 粘弾性圧子接触面積

a_{H} 均質等方半無限個体の圧子接触半径

a 圧子接触半径

B (3.34)式で定義される圧子形状係数

C_{f} 試験装置躯体コンプライアンス

C_{g}； C_{e} ガラスコンプライアンス；平衡コンプライアンス

$C_{\mathrm{creep}}(t)$，$C'_{\mathrm{creep}}(t)$，$C'(t)$ クリープコンプライアンス

$C^{*}(p)$ クリープコンプライアンスの Carson 変換； $p\bar{C}(p)$

C (3.34)式で定義される圧子形状係数

c (5.7)式で定義される拘束因子

E； E' 弾性率（ヤング率）

E_{g}； E_{e} ガラス弾性率；平衡弾性率

E_{M} Maxwell バネの弾性率

E_{V} Voigt バネの弾性率

$E_{\mathrm{relax}}(t)$，$E'_{\mathrm{relax}}(t)$，$E(t)$ 緩和弾性率

$\bar{E}(p)$ 緩和弾性率の Laplace 変換

$E^{*}(p)$ 緩和弾性率の Carson 変換； $p\bar{E}(p)$

E'_{eff} 積層複合体の有効弾性率

e (2.16)式で定義される体積歪

G ずり弾性率

$G_{\mathrm{relax}}(t)$ ずり緩和弾性率

g 円錐・ピラミッド圧子の面積因子； $A = gh^2$

HTT 熱処理温度

$H(\tau)$ 緩和時間スペクトル

H_{M} Meyer 硬度

h，$h_{\max}$，$h(t)$ 圧子圧入深さ

h_{c} 圧子接触深さ

h_{r} 残留圧痕深さ

$J_n(x)$ 第一種 n 次 Bessel 関数

$J_{\mathrm{creep}}(t)$ ずりクリープ関数

K 体積弾性率

k (4.2)式で定義されるずり降伏応力

k_h (3.33)式で定義される圧子負荷係数

k_{e}，k_{p}，k_{ep} 円錐・ピラミッド圧子の P - h^2 負荷直線の勾配（負荷係数）

k_1 P - h^2 負荷直線の勾配（負荷係数）

k_2 P - h^2 徐荷直線の勾配（徐荷係数）

$L(\tau)$ 遅延時間スペクトル

M 徐荷モジュラス

P，$P(t)$ 荷重，圧子荷重

p_{C}，p_{F}，p_{S} (3.35)式～(3.37)式で定義される接触圧力分布係数

PI 塑性歪； $\varepsilon_1 E'/cY$

$p(r)$ 圧子接触圧力分布

T 絶対温度

t，t' 時間

p_m 圧子平均接触圧； $P/\pi a^2$

p_0 球形圧子最大接触圧； $(3/2)\,p_{\mathrm{m}}$

R 球形圧子の半径

S，S_{obs} 徐荷スティフネス

T_{g} ガラス転移温度

t_{f} 積層材皮膜厚さ

U (4.6)式で定義される歪エネルギー密度

U_{T}，U_{e}，U_{r} (5.19)式～(5.21)式で定義される P - h 履歴曲線に関わるエネルギー

$u(t)$ Heaviside ステップ関数

V，V_{e}，V_{p} (5.12)式で定義される圧子排除体積

WOI (5.24)式で定義される圧入仕事

Y 降伏応力，降伏強度

β 円錐・ピラミッド圧子面傾き角度
β_{c} 円錐圧子の面傾き角度
$\chi(t)$ (3.4)式で定義される Sneddon 関数
Δ (2.3)式で定義される Laplace 演算子
ΔG Gibbs 自由エネルギー変化
ΔH エンタルピー変化
ΔS エントロピー変化
$\delta(t)$ Dirac デルタ関数
ε_{R}，$\left(\varepsilon_p\right)_{\mathrm{R}}$ 歪硬化曲線の代表塑性歪
ε_{I} 圧子圧入歪
$\varepsilon_{\mathrm{IY}}$ ε_{I} の塑性発現敷居値
ε_i 法線歪
$\varepsilon(t)$ 粘弾性歪
$\bar{\varepsilon}(p)$ $\varepsilon(t)$ の Laplace 変換
$\varphi(r,z)$ Airy の応力関数，Love の応力関数
$\varphi_n{}^H(\zeta,z)$ (2.23)式で定義される $\varphi(r,z)$ の Hankel 変換
Γ (8.43)式で定義される表面付着力
γ 接触半径比；$\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_h$
γ 表面エネルギー，付着エネルギー
γ_{ij} ずり歪
η，η_{c}，$\eta_{\mathrm{c}}(t)$ 相対接触深さ；h_{c}/h
η_{e} 完全弾性体の η 値
η_{p} 完全塑性体の η 値
η 定常ずり粘性
κ 体積コンプライアンス，$1/K$
λ_{E}，λ_{EP} 第 8 章で定義される付着靭性値
ν，$\nu(t)$ ポアソン比
ρ 無次元半径；r/a
Σ (2.3)式で定義される法線応力和
σ_i 法線応力
$\sigma(t)$ 粘弾性応力
$\bar{\sigma}(p)$ $\sigma(t)$ の Laplace 変換
τ 緩和時間
τ_{M} Maxwell モデルの緩和時間
τ_{Z} Zener モデルの緩和時間
τ_{ij} ずり応力
ξ 無次元膜厚；t_{f}/a
ξ_{r} 無次元圧痕深さ；$h_{\mathrm{r}}/h_{\max}$

1 変形の定量記述　－歪と応力－

圧子力学(indentation contact mechanics)は連続体力学(continuum mechanics)が扱う各種の力学問題の範疇にあって，「接触問題」として位置付けられる。異なる二つの連続体が接触している界面の力学場は極めて複雑であり，その数学的な記述に困難を伴う場合も多い。本章では第 3 章以降で論じる接触問題の数学的取り扱いを念頭に連続体力学場を定量記述するための数学的な準備を行う **[1.1-1.3]**。

任意の固体に「荷重 (力)(load, force)」を付加すると，これに対する力学応答として「変形(deformation)」が生じる。本節では変形の定量的な定義と記述法について述べる。記述を簡潔にするため図 1.1 に示す 2 次元平面での変形を例に話を進める。図には長さ dx の線素 AB が x 方向に併進移動 u_{A} を伴いながら長さが $dx+\delta$ の線素 A'B'に伸長する様子と，ずり変形により長さ dy の線素 CD が x方向に併進移動 u_{C} を伴いながら線素 C'D'に変化する様子が描かれている。したがって AB 間における x 方向正味の伸長量 δ は A 点でのテーラー展開により次式で与えることができる；

$$\delta = u_{\mathrm{B}} - u_{\mathrm{A}} = \left(u_{\mathrm{A}} + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u_{\mathrm{A}} = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

これにより，単位長さ当たりの微分伸長変化量として x 方向「伸長歪(strain for elongation)」は次式で定義される；

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.1}$$

すなわち,「歪(strain)」は変位勾配として定義される。同様にして，y および z 方向の変形に伴うそれぞれの変位量 v および wを用い次式により y および z 方向の伸長歪は定義される；

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.2}$$

伸長(圧縮)変形は連続体を構成している原子・分子平面が，その法線方向への相互距離変化として発現する。一方，ずり変形(shear deformation)では原子・分子平面間距離を保ったまま相互にずれる現象として発現する。図 1.1 には垂直方向(y 方向)の線素 CD(長さ dy)が水平方向 (x 方向)に δ だけ「ずり変形」を受け，その結果，角度 γ 傾いた線素 C'D'へと変形する様子が描かれている；

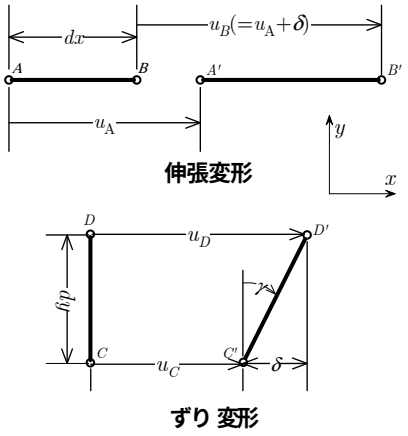


図 1.1　2 次元平面における伸長変形とずり変形

[1.1] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill (1970)

[1.2] I.H. Shames, F.A. Cozzarelli, "Elastic and Inelastic Stress Analysis", Prentice Hall (1992)

[1.3] D. Roylance, "Mechanics of Materials", John Wiley & Sons (1996)

$$\delta = u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{C}} = \left(u_{\mathrm{C}} + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u_{\mathrm{C}} = \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

かくして，y 方向の「ずり歪(Shear　Strain)」は，ずり変形に伴う y 方向変位勾配，$\partial u/\partial y (\equiv \tan\gamma)$，として定義され，次式により，ずり傾き角度 γ を用いて表現される；

$$\gamma(\approx \tan\gamma) = \frac{\delta}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

より一般的な 2 次元平面のずり変形を考えると，この平面が面内で回転することなく釣り合う必要性(力学的平衡条件)から，図 1.1 に示した水平方向(x 方向)へのずり変位勾配のみならず垂直方向(y 方向) ずり 変位量 v に起因する変位勾配$\partial v/\partial x$ も生じる。

したがって xy 平面内で生じるずり歪 γ_{xy} は両者の和

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

として与えられる。同様にして yz 平面，zx 平面内のずり歪は

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.4}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.5}$$

により記述できる。

(1.2)式および(1.3)式～(1.5)式で定義された 6 種の歪は 3 種の変位 u，v，w により記述されているため，6 種類の歪は全てが独立には存在しえず，「適合条件式(compatibility equation)」により相互に関係付けられている。連続体の変形において隣接する 2 点間に亀裂や重なりが生じてはならないとする物理的な条件として，この適合条件式は存在し，(1.1)式～(1.3)式は

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

と書き換えることができる。したがって

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

同様にして，

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \qquad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

の関係から次式を得る；

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

同種の微分操作を他の歪成分についても繰り返し行うことにより最終的に以下に示す適合条件式(Saint Venant 方程式)を得る；

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} && 2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} && 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial x\partial z} && 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

(1.6)

これらの「適合条件式」は，以下に議論する力のつり合いを表現した「平衡方程式」と共に任意境界条件下にある連続体の力学応答を記述する「重調和方程式 (bi-harmonic equation)」の導出において重要な役割を果たす。

次に，連続体外部表面が各種の外部力および変位拘束を受けて力学的に平衡状態(mechanical equilibrium)にある場合を考えてみよう。この連続体内部には上述した変形に伴う各種の歪と共に，外力と力学的平衡を保つための「内力」が生じている。力学的平衡状態にある連続体内部の任意の一点において，各稜が，それぞれ x，y，および z 方位にある直方体の表面に生じている内力の 3 次元表記を図 1.2 に示す。各面の法線が x，y，および z 方向にある面を，それぞれ，x 面，y 面，z 面と呼び，それぞれの面上に作用している「単位面積当たり」の内力として定義される「応力(stress)」のうち，各面の法線方向に発現している応力成分は法線応力(normal stress)と呼ばれる。x 面, y 面, および z 面上の法線応力を，それぞれ，σ_x，σ_y，σ_z と表記する。一方，x 面，y 面，および z 面内に作用しているずり応力(shear stress)は，それぞれ，(τ_{xy}，τ_{xz})，(τ_{yx}，τ_{yz})，および(τ_{zx}，τ_{zy})により表される (例えば，x 面内 y 向方向ずり応力を τ_{xy} により，x 面内 z 方向ずり応力を τ_{xz} により表記する)。

先に述べたように図 1.2 に示した直方体は力学的に平衡状態にある連続体内部から切り出されたものであるため，この直方体は

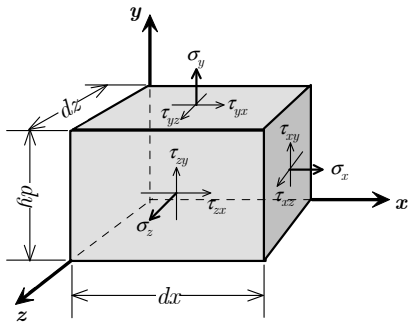


図 1.2 力学的平衡にある連続体内部から切り出した，各稜が，それぞれ x，y，および z 方位にある直方体の表面に生じている内力（応力）の 3 次元表記

独自に回転したり平衡移動することはありえない。したがって x, y, z 軸周りに直方体が回転しないために，各軸周りの回転モーメントが釣り合っている必要があり，その結果，ずり応力に関しては以下に示す対称関係が存在する；

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned} \tag{1.7}$$

一方，x 軸方向に作用している力が平衡状態にあるためには次式で示す力のつり合い条件の満たされている必要がある；

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz - \sigma_x dydz \\ &\quad + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx - \tau_{yx}dzdx \\ &\quad + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy - \tau_{zx}dxdy \\ &\quad + Xdxdydz = 0\end{aligned}$$

したがって x 軸方向に関する力のつり合いを示す平衡方程式として次式を得る；

$$\frac{\partial \sigma_x}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{dy} + \frac{\partial \tau_{xz}}{dz} + X = 0 \tag{1.8a}$$

ここに X は着目している連続体に作用している x 軸方向の体心力 (body force; 重力，遠心力等)を表している。同様にして，y 軸および z 軸方向の力学的平衡方程式は，それぞれの座標軸方向の体心力を Y，Z として，

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{dx} + \frac{\partial \sigma_y}{dy} + \frac{\partial \tau_{yz}}{dz} + Y = 0 \tag{1.8b}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{dx} + \frac{\partial \tau_{zy}}{dy} + \frac{\partial \sigma_z}{dz} + Z = 0 \tag{1.8c}$$

で与えられる。

本書で主に扱う圧子圧入と徐荷に伴う力学過程は圧入軸周りの軸対象現象として発現する。したがって上述の(x, y, z)座標系で圧子力学過程を記述するよりも，むしろ，図 1.3 に示す軸対象の円柱座標系 (r, θ, z) (polar coordinate)を用いることにより，より合理的に適合条件式や力学的平衡方程式を表現することができる。変形に伴う変位の r，θ，および z 方向成分を u_r，u_θ，および u_z とすると, 円柱座標系における歪の 3 次元表記は次式で与えられる；

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\
\gamma_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

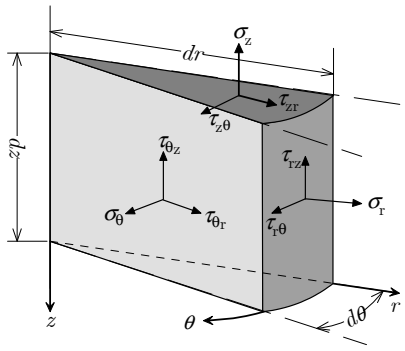


図 1.3　円柱座標系における 3 次元応力表記

また，(x, y, z)座標系における Saint Venant 適合条件式(1.6)式に対応する(r, θ, z)座標系での適合条件式は次式により与えられる；

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left\{ r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \left(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\gamma_{r\theta}}{r}\right) \\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} + \gamma_{rz}\right) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} \\
&\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta \partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} - \gamma_{\theta z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} + \frac{\gamma_{\theta z}}{r^2} \\
&2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} \\
&\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - \frac{\varepsilon_z}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial z} - \frac{\gamma_{\theta z}}{r}\right)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

一方，r，θ，および z 方向の体心力を，それぞれ，R，Θ，Z により表すと，(1.8)式に対応する円柱座標系での力学的平衡方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + R = 0 \\
&\frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \Theta = 0 \\
&\frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

により与えられる（詳細については APPENDIX A 参照）。

2 完全弾性体の力学

2.1 完全弾性体の構成方程式

17 世紀後半，Robert Hooke はワイヤーに付加した荷重 P と，これにより生じる伸長量δとの関係を精密に測定し, 荷重が比較的小さい場合，δが P に比例して増加する事実，さらに完全徐荷後にこのワイヤーが元の長さに復元する事実を実験的に明らかにした。すなわち,

$$P = k\delta$$

で示す Hooke 則(Hooke's law)の存在を明らかにした。上式において弾性係数(フックのバネ定数; Spring Constant) k は注目する材料固有のものではなく，その形状(太さと長さ)に依存することも明らかにしている。18 世紀に入り，Thomas Young は Hooke 則のより普遍的な関係式として，応力と歪に関する線形則(linear rule)の存在を明らかにした；

$$\sigma = E\varepsilon$$

ここに，弾性係数 E は材料固有の物性定数であり，ヤング率(Young's modulus)と呼ばれている。一般的に言って弾性丸棒を軸方向に伸長すると軸に直交する径方向に若干の収縮現象が観測される。この現象は弾性体が変形後も，その体積を一定に保とうとする性質に由来しており，フランスの数学者 Simeon Denis Poisson に因み，ポアソン効果(Poisson effect)と呼ばれる。軸方向の歪$\varepsilon_{\mathrm{axial}}$に対する径方向の歪$\varepsilon_{\mathrm{radial}}$の比として次式で定義されるポアソン比$\nu$ (Poisson's ratio)は材料固有の物性値である；

$$\nu = \frac{-\varepsilon_{\mathrm{radial}}}{\varepsilon_{\mathrm{axial}}}$$

径方向の収縮により$\varepsilon_{\mathrm{radial}} < 0$となるのでポアソン比を正値として定義するため，上式において，$-\varepsilon_{\mathrm{radial}}$が導入されている。

ヤング率やポアソン比等の力学物性パラメータを用いて表現した線形弾性体の 3 次元構成式を以下に示す；

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここに，ずり弾性率 G は，ずり変形への弾性抵抗を表す物性値でありポアソン比を介して次式によりヤング率に関係付けられる；

$$
G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.2}
$$

一般的な連続体の歪成分間に存在する Saint Venant 適合条件式((1.6)式)に力学的平衡式である(1.8)式および完全弾性体の構成方程式(2.1)式を適用することにより得られる「完全弾性体」の各応力成分間に成立する Beltrami-Michell 適合条件式は次式,

$$
\begin{aligned}
&(1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial x^2} = 0 \quad (1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial x\partial y} = 0 \\
&(1+\nu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial y^2} = 0 \quad (1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial y\partial z} = 0 \\
&(1+\nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial z^2} = 0 \quad (1+\nu)\Delta\tau_{zx} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial z\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

により与えられる。(2.3)式において Laplace 演算子(Laplacian) Δ は $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ で定義され，Σ は $\Sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ で定義される法線応力和を意味する。3 次元 Beltrami-Michell 方程式((2.3)式)の解を解析的に求めるためには，複雑な演算が必要となる。しかし，次節で詳述するように 2 次元平面問題や軸対称問題においては，比較的容易に解析解を導出することができる。先ず第 2.2 節で(x, y)直交平面座標系における 2 次元問題の代表例として「平面歪」状態における弾性論を詳述し，続く第 2.3 節では圧子力学で多用される円柱座標系を用いた軸対称弾性問題を論ずる。

2.2 平面歪問題

z 軸方向の変位が存在せず，すなわち，(1.2)式，(1.4)式，および(1.5)式に $w=0$ を代入し，これに加えて，x 軸方向変位 u および y 方向変位 v が共に z 軸に依存しない平面歪(plane strain)問題を考える**[1.1-1.3]**。平面歪状態の場合，(1.1)式～(1.5)式より

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4}$$

さらに平面歪条件を(1.6)式に代入することにより，(2.4)式で与えられた各歪成分間に存在する Saint Venant 適合条件式は，次式で示すように簡潔な表現式となる；

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{2.5}$$

一方，(1.8a)式および(1.8b)式より平面歪状態における力学的平衡方程式は次式で表現できる；

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{2.6a}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{2.6 b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = 0 = \tau_{zx} \tag{2.6 c}$$

(2.6a)，(2.6b)式では議論を簡潔にするため，体心力 X，Y を省略した表現式となっている。一方，平面歪状態にある完全弾性体の構成式(constitutive equation)は，(2.1)式に $\varepsilon_z = 0$ を代入することにより，次式のように書き換えられる；

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E'}\left(\sigma_x - \nu'\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E'}\left(\sigma_y - \nu'\sigma_x\right) \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = 0 = \gamma_{zx} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ここに，平面歪における弾性率 E' およびポアソン比 ν' は，それぞれ，$E' = E\big/\left(1-\nu^2\right)$，$\nu' = \nu\big/(1-\nu)$ により定義される。

2 次元 Saint Venant 適合条件(2.5)式は平面歪状態にある<u>任意</u>の連続体の「歪成分間」に成立する適合条件式であるが，<u>完全弾性体(perfectly elastic body)</u>の構成式である(2.7)式を(2.5)式に代入するこ

とにより「応力成分間」で成立する完全弾性体の適合条件式(Beltrami-Michell 適合条件式)として次式を得る；

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \nu'\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \nu'\sigma_x\right) = 2\left(1+\nu'\right)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (2.8)$$

力学的平衡式(2.6a)および(2.6b)を，それぞれ，x および y で微分することにより与えられる

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

を上記の平面歪 Beltrami-Michell 適合条件式((2.8)式)に適用することにより，最終的に 2 次元完全弾性体の応力に関する Laplace 方程式として次式が得られる；

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \qquad (2.9a)$$

Laplace 演算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を用いることにより(2.9a)式は

$$\Delta\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \qquad (2.9b)$$

と表現することもできる。Laplace 方程式の解は調和関数(harmonic function)と呼ばれる。(2.9)式は，適合条件式(2.5)式，力学的平衡方程式(2.6)式，さらに完全弾性体の構成式(2.7)式を同時に満たしている。したがって変形に関する境界条件を(2.9)式に適用することにより任意の 2 次元弾性問題を解くことができる。

G.B. Airy は(2.9)式で示した 2 次元弾性問題を解くに当たり次式で定義される応力関数 φ を導入した；

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \qquad (2.10)$$

(2.10)式で定義される任意の応力関数 φ は力学的平衡方程式(2.6)式を自動的に満たしている。(2.10)式を(2.9)に代入することにより最終的に応力関数 φ に関する 4 次微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \\ &= \Delta \cdot \Delta \varphi \qquad (2.11) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。(2.11)式は $\Delta\varphi$ に関する Laplace 方程式となっている

ため，φは重調和関数(bi-harmonic function)とも呼ばれる。したがって(2.11)式に示した重調和方程式を然るべき境界条件のもとで解くことにより得られる解φを(2.10)式に代入することにより，2次元応力状態を記述することができ，さらには，これらの応力と弾性体構成式(2.7)式から平面歪問題における歪・応力分布を定量的に記述することが可能となる。

2.3 軸対称問題

圧子圧入軸(z 軸)に関する軸対象問題は方位角θに依存しない 3 次元問題として円柱座標系を用いて取り扱うことができる。したがって(1.9)式を用いることにより

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &\gamma_{r\theta} = 0 \qquad \gamma_{\theta z} = 0 \qquad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \tag{2.12}$$

の関係を得る。また, (2.12)式の歪と変位の関係を結びつける Saint Venant 適合条件式は, (1.10)式に軸対称条件を適用することにより次式で表現出来る；

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left\{ r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \left(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right)\right\} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} \\ &\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} \\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

さらに, 力学的平衡方程式(1.11)式の軸対象表現は次式で与えられる；

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0 \tag{2.14a}$$

$$\frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.14b}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 = \tau_{z\theta} \tag{2.14c}$$

上式では表現を簡潔にするため(1.11)式の体心力(R，Θ，Z)を省略している。

一方, (x, y, z)座標系における線形弾性体構成式((2.1)式)を軸対称

問題に適用することにより，各応力成分で表現した完全弾性体構成方程式は

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] \\
&\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_z + \sigma_r\right)\right] \\
&\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] \\
&\gamma_{r\theta} = 0 \qquad \gamma_{\theta z} = 0 \qquad \gamma_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G}
\end{aligned}
\tag{2.15a}
$$

あるいは，歪または変位で表現した構成式として

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = \lambda e + 2G\varepsilon_r = \lambda e + 2G\frac{\partial u_r}{\partial r} \\
&\sigma_\theta = \lambda e + 2G\varepsilon_\theta = \lambda e + 2G\frac{u_r}{r} \\
&\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z = \lambda e + 2G\frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&\tau_{r\theta} = 0 \qquad \tau_{\theta z} = 0 \qquad \tau_{zr} = G\gamma_{zr} = G\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)
\end{aligned}
\tag{2.15b}
$$

により与えられる。上式で体積歪eおよびラメ定数λはそれぞれ次式により定義される；

$$
\begin{aligned}
e &= \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\lambda &= \frac{\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}E
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

さらに，(2.14)式～(2.16)式を Saint Venant 適合条件式(2.13)式に代入することにより，軸対称問題における完全弾性体の Beltrami-Michell の適合条件式として次式を得る；

$$
\begin{aligned}
&\Delta\sigma_r - \frac{2}{r^2}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial r^2} = 0 \\
&\Delta\sigma_\theta - \frac{2}{r^2}\left(\sigma_\theta - \sigma_r\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\Sigma}{r\partial r} = 0 \\
&\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial z^2} = 0 \\
&\Delta\tau_{rz} - \frac{1}{r^2}\tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial r\partial z} = 0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

ここに，Σ は$\Sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$で定義される法線応力和を意味し，軸対象円柱座標での Laplace 演算子は

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

により表現出来る。

平面歪問題の定量記述に際し, 第 2.2 節では (2.10)式において, Airy の応力関数を導入することにより重調和方程式を誘導した。これと同様に軸対称問題においても各応力成分を一意的に記述することのできる応力関数として Love の応力関数φを次式により導入する；

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Love の応力関数φを導入することにより力学的平衡を表現した(2.14a)式は自動的に満足される。また，φ が次式で示す重調和方程式

$$
\Delta \cdot \Delta\varphi = 0 \tag{2.20}
$$

の解であると仮定することにより, (2.14a)式と同様に, (2.14b)式も自動的に満足される。さらに，変位u_rが$u_r = r\varepsilon_\theta$，$u_z$が$u_z = \int \varepsilon_z dz$により与えられることに留意すると，(2.15)式，(2.16)式および(2.19)式に応力関数φを適用し変位成分を以下のように表すことができる；

$$
\begin{aligned}
2Gu_r &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} \\
2Gu_z &= 2(1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

したがって与えられた境界条件の下で上記の重調和方程式((2.20)式)の解φを求め, この解を(2.19)式に, さらには(2.15a)式に代入することにより, 完全弾性体の軸対称問題における応力場および歪･変位場を定量記述することが可能となる。

2.4　軸対称問題における重調和方程式の解法
ーHankel 変換の適用ー

弾性問題を解くには与えられた境界条件の下で重調和方程式(2.11)式あるいは(2.20)式の解である応力関数φを求める必要がある。19 世紀後半から 20 世紀前半に掛け多くの数学者・物理学者が重調和方程式の解法に挑戦し，特定の限定された境界条件下では応力関数φを多項式やフーリエ級数で表現する解法が提案された。より一般的には応力関数φを複素空間で表現する手法が広く用いられている。圧子力学問題に話を限ると，その力学過程は圧入軸に関する軸対象問題となり，この力学過程を記述する最も適した座標系は図 1.3 に示した円柱座標系となる。円柱座標系では重調和関数を始め多くの Laplace 方程式の解法に Hankel 変換(Hankel transformation)の適用が極めて有効であることが広く知られている。本節では(2.20)式で示した重調和方程式に Hankel 変換を適用することにより各種の軸対称弾性圧子力学問題を議論する**[2.1-2.2]**。

Hankel 変換では変換積分の核に Bessel 関数を用いる。Hankel 変換の適用により重調和方程式を極めて簡潔に解く事ができるのは，円柱座標系における Laplace 方程式$\Delta\varphi = 0$に変数分離法を適用することによって得られる動径方向微分方程式が第一種 Bessel 微分方程式に帰着される事実に由来している。円柱座標系でその有意性が発揮されるため Bessel 関数は円柱関数あるいは円筒関数とも称される。Bessel 関数のより詳細な解説は本書巻末の Appendix B に与えられている。

第一種 n 次 Bessel 関数$J_n(x)$は微分方程式

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0 \qquad (2.22)$$

の解として定義される。一方，応力関数$\varphi(r,z)$の Hankel 変換を次式

$$\varphi_n^{\mathrm{H}}(\xi, z) = \int_0^\infty r\varphi(r,z) J_n(\xi r) dr \qquad (2.23)$$

で定義すると，その逆変換は(2.24)式で表現される；

$$\varphi(r,z) = \int_0^\infty \xi \varphi_n^{\mathrm{H}}(\xi, z) J_n(\xi r) d\xi \qquad (2.24)$$

ここで，(2.18)式で与えられる Laplace 演算子を応力関数φに作用させて得られる関数$\Delta\varphi$の零次 Bessel 関数$J_0(\xi r)$に関する Hankel

[2.1] I.N. Sneddon, “Fourier Transforms”, McGraw-Hill (1951)
[2.2] D. Maugis, “Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids”, Springer (2000)

変換

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty r\Delta\varphi(r,z)J_0(\xi r)dr \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)J_0(\xi r)dr + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^\infty r\varphi J_0(\xi r)dr
\end{aligned}
$$

を考えてみる。上記の右辺第一項の積分を 2 度に渡り部分積分し，さらに，上述した n 次 Bessel 関数 $J_n(x)$ を定義した微分方程式((2.22)式)に $n=0$ を代入することにより得られる零次 Bessel 関数 $J_0(x)$ に関する微分方程式

$$
\frac{d^2\left[J_0(\xi r)\right]}{d(\xi r)^2} + \frac{1}{\xi r}\frac{d\left[J_0(\xi r)\right]}{d(\xi r)} + J_0(\xi r) = 0
$$

を適用することにより

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty r\Delta\varphi(r,z)J_0(\xi r)dr \\
&= \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)\int_0^\infty r\varphi J_0(\xi r)dr \qquad (2.25) \\
&= \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)\varphi_0^{\mathrm{H}}(\xi,z)
\end{aligned}
$$

を得る。ただし，上述した部分積分の操作では応力関数 φ およびその空間勾配 $d\varphi/dr$ が $r\to\infty$ において 0 となる力学条件を利用している。さらに，上述の積分 I において新たに $\varphi \equiv \Delta\varphi$ を代入することにより重調和方程式(2.20)式，$\Delta\cdot\Delta\varphi = 0$，の Hankel 変換として次式を得る。

$$
\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)\varphi_0^{\mathrm{H}}(\xi,z) = 0 \qquad (2.26)
$$

すなわち，「重調和方程式(2.20)式の解 $\varphi(r,z)$ は(2.26)式で与えられる z に関する常微分方程式の解 $\varphi_0^H(\xi,z)$ の Hankel 逆変換として与えられる」。換言すると重調和関数 $\varphi(r,z)$ の Hankel 変換 $\varphi_0^H(\xi,z)$ は(2.26)式を満足する。一方，z に関する 4 次線形常微分方程式(2.26)式は，その特性方程式が重根($\pm\xi$)を有することに着目して容易に解くことができる。4 個の積分定数 A，B，C，D を用い，(2.26)式の一般解は次式で与えられる；

$$
\varphi_0^{\mathrm{H}}(\xi,z) = (A + B\xi z)e^{-\xi z} + (C + D\xi z)e^{\xi z} \qquad (2.27)
$$

これら 4 個の積分定数は個々の軸対称力学問題における境界条件から最終的に決定される。

第 3 章で詳述する圧子力学理論の展開において重要な役割を果たす各変位成分および各応力成分の $\varphi_0^H(\xi,z)$ を用いた表現式導出を以下に示しておく。先ず，$\Delta\varphi$ の零次 Hankel 変換が(2.25)式で与えられること，さらに，導関数 $d\varphi/dr$ の一次 Hankel 変換が次式

$$\int_0^\infty r(d\varphi/dr)J_1(\xi r)dr = -\xi\int_0^\infty r\varphi J_0(\xi r)dr$$

により関数 φ の零次 Hankel 変換に関係付けられる事実(Appendix B 参照)に留意したうえで，(2.21)式に Hankel 変換とその逆変換を適用することにより，最終的に変位 u_r および u_z を Hankel 空間での応力関数 $\varphi_0^H(\xi,z)$ を用い次式のように表すことができる；

$$2Gu_r = \int_0^\infty \xi^2 \frac{d\varphi_0^{\mathrm{H}}}{dz} J_1(\xi r)\,d\xi \tag{2.28}$$

$$2Gu_z = \int_0^\infty \xi\left[(1-2\nu)\frac{d^2\varphi_0^{\mathrm{H}}}{dz^2} - 2(1-\nu)\xi^2\varphi_0^{\mathrm{H}}\right]J_0(\xi r)\,d\xi \tag{2.29}$$

同様の Hankel 変換操作を(2.19)式に適用することにより，$\varphi_0^H(\xi,z)$ を用いて各応力成分 σ_r，σ_θ，σ_z，τ_{rz} を一意的に表現することもできる；

$$\begin{aligned}\sigma_r = &\int_0^\infty \xi\left[\nu\frac{d^3\varphi_0^H}{dz^3} + (1-\nu)\xi^2\frac{d\varphi_0^H}{dz}\right]J_0(\xi r)\,d\xi \\ &-\frac{1}{r}\int_0^\infty \xi^2\frac{d\varphi_0^H}{dz}J_1(\xi r)\,d\xi\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = \nu&\int_0^\infty \xi\left[\frac{d^3\varphi_0^H}{dz^3} - \xi^2\frac{d\varphi_0^H}{dz}\right]J_0(\xi r)\,d\xi \\ &+\frac{1}{r}\int_0^\infty \xi^2\frac{d\varphi_0^H}{dz}J_1(\xi r)\,d\xi\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\sigma_z = \int_0^\infty \xi\left[(1-\nu)\frac{d^3\varphi_0^H}{dz^3} - (2-\nu)\xi^2\frac{d\varphi_0^H}{dz}\right]J_0(\xi r)\,d\xi \tag{2.32}$$

$$\tau_{rz} = \int_0^\infty \xi^2 \left[\nu \frac{d^2 \varphi_0^H}{dz^2} + (1-\nu)\xi^2 \varphi_0^H \right] J_1(\xi r)\, d\xi \qquad (2.33)$$

第 3 章で論じる完全弾性体の圧子力学理論の展開において，各種形状の軸対称圧子(平端円柱圧子, 球形圧子, 円錐圧子)の圧入荷重 P と圧入深さ h との関係を導出する際に(2.28)式～(2.33)式は重要な役割を果たす。

3 完全弾性体の圧子力学

硬度測定のみならずミクロ・ナノ領域における各種の力学物性の測定・評価に広く用いられている代表的な微小圧子の幾何形状には，球形(ブリネル(Brinell 圧子))，円錐(ロックウェル(Rockwell 圧子))，三面ピラミッド(バーコビチ(Berkovich 圧子))，および四面ピラミッド(ビッカース(Vickers 圧子))がある。試験体表面に，これらの圧子を圧入する過程での圧入荷重 P と圧入深さ h との関係(P-h 関係)から注目する試験体の力学物性を定量評価することが可能となる。容易に推察できることであるが，圧子の幾何形状が異なると，同一試験体であっても，その P-h 関係は著しく異なってくる。本節では，任意形状を有する軸対称圧子について弾性圧子力学の一般理論を展開する**[2-2]**。

任意形状軸対称圧子を荷重 P で半無限平面上に圧入した状況を図 3.1 に示す(簡単のために，圧子と平面との接触摩擦をゼロと仮定する)。圧子の圧入深さを h，圧子と材料表面との接触深さと接触半径を，それぞれ，h_c および a とし，圧入軸(z 軸)から半径 r における自由表面での z 方向変位を $u_z(r,0)$ とする。この圧入状況に対する自由表面 z=0 での境界条件は次式で定量的に記述される；

$$
\begin{aligned}
&u_z(\rho,0) = h - f(\rho); \quad 0 \le \rho \le 1 \\
&\sigma_z(\rho,0) = 0: \qquad \rho > 1 \\
&\tau_{rz}(r,0) = 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

ここに，$\rho = r/a$ は接触半径 a を用いた無次元半径，$f(\rho)$ は $f(0)=0$ で定義される軸対象圧子の形状関数である。(3.1)式の第一式は圧子接触領域($0 \le \rho \le 1$)での表面変位を表しており，第二式は圧子接触領域の外側($\rho > 1$)では z 方向の応力が存在しない自由表面であることを意味している。また，第三式は圧子と材料表面間での接触摩擦が存在しないことを表現している。

圧子の接触領域から十分に離れた領域($r \to \infty$)ではすべての応力成分がゼロとなる自明の事実により，(2.27)式で与えた重調和応力関数の Hankel 変換 $\varphi_0^H(\xi,z)$ は $\xi \to \infty$ で有限でなければならない，すなわち，無限大に発散してはならない。この事実により(2.27)式は以下のように書き換えられる；

$$
\varphi_0^{\mathrm{H}}(\xi,z) = (A + B\xi z)e^{-\xi z}
$$

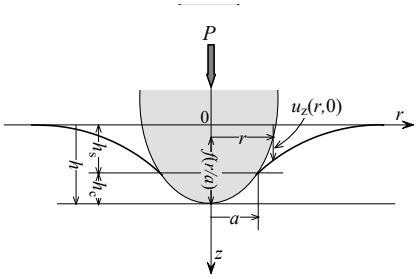


図 3.1　$f(r/a)$ により形状を記述した軸対称圧子の圧入に伴う半無限平面の変形

(3.1)式の境界条件 $\tau_{rz}(r,0)=0$ を(2.33)式に適用して得られる

$$(1-\nu)\xi^2\varphi_0^H(\xi,0)+\nu\left(\frac{d^2\varphi_0^H}{dz^2}\right)_{z=0}=0$$

に上述の関係式 $\varphi_0^{\mathrm{H}}(\xi,z)=(A+B\xi z)e^{-\xi z}$ を代入することにより $A=2\nu B$ の関係が得られる。したがって Hankel 変換した重調和方程式の解 $\varphi_0^H(\xi,z)$ は

$$\varphi_0^H(\xi,z)=B(2\nu+\xi z)e^{-\xi z} \tag{3.2}$$

と表現できる。

さらに, (2.29)式および(2.32)式に境界条件(3.1)式を適用し, 得られた関係式に(3.2)式を代入することにより，最終的に未定定数 B は次式で与えられる；

$$B=-\frac{E'a}{2\xi^3}\int_0^1\chi(t)\cos(a\xi t)dt \tag{3.3}$$

ここに E' は $E'=E\big/\left(1-\nu^2\right)$ で定義される平面歪ヤング率を意味する。(3.3)式の積分に含まれる $\chi(t)$ は Sneddon により導入された関数であり，圧子形状関数 $f(r)$ および圧入深さ h を用い次式で定義される；

$$\chi(t)=\frac{2}{\pi}\left(h-t\int_0^t\frac{f'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx\right) \tag{3.4}$$

上述の考察により，圧子形状関数 $f(r)$ に関係付けて積分定数 B を決定することができた。したがって(3.3)式を(3.2)式に代入することにより

$$\varphi_0^H(\xi,z)=-(2\nu+\xi z)e^{-\xi z}\frac{E'a}{2\xi^3}\int_0^1\chi(t)\cos(a\xi t)dt \tag{3.5}$$

を得る。このようにして得られた $\varphi_0^H(\xi,z)$ を(2.28)式～(2.33)式に代入することにより，$f(r)$ で記述された任意形状の軸対称圧子(図 3.1 参照)の圧入に伴う半無限弾性体の表面変位と応力とを定量的に記述することが可能となる。

先ず，(3.5)式で与えられた $\varphi_0^H(\xi,z)$ を用い，圧入荷重 P と，これにより生じる圧入深さ h との関係($P-h$ 関係)について考察する。圧入荷重 P は半径 a の領域に広がる接触応力 $\sigma_z(r,0)\ (r\le a)$ の総和として $P=-2\pi\int_0^a r\sigma_z(r,0)dr$ により表現できることに留意した

うえで，(3.4)式および(3.5)式を(2.32)式に適用することにより，最終的に次式で示す $P-h$ 関係を得る;

$$P = 2aE'\left[h - \int_0^1 \frac{xf(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\right] \tag{3.6}$$

接触領域($\rho < 1$)における接触圧力分布 $\sigma_z(r,0)$ は(2.32)式に(3.5)式を代入することにより次式で与えられる；

$$\sigma_z(\rho,0) = -\frac{E'}{2a}\left[\frac{\chi(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{\chi'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right] \tag{3.7}$$

一方，接触領域の外側に位置する($\rho > 1$)自由表面での z 方向変位 $u_z(\rho,0)$ は(3.5)式を(2.29)式に代入することにより次式で表現することができる；

$$\begin{aligned} u_z(\rho,0) &= \int_0^1 \frac{\chi(t)dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}} \\ &= \chi(1)\sin^{-1}\frac{1}{\rho} - \int_0^1 \chi'(t)\sin^{-1}\frac{t}{\rho}dt \end{aligned} \tag{3.8}$$

$f(r)$ により記述された任意形状軸対称圧子に関して展開した上述の弾性圧子力学に関わる一般論を基に軸対称圧子の具体例について更に圧子力学的考察を進める。

3.1　平端円柱圧子

図 3.2 に平端円柱圧子(flat punch)(半径 a_0)圧入に伴う半無限弾性体表面変形の様子を示す。接触半径 a_0 を底とする無次元半径座標 $\rho(=r/a_0)$ を用いると圧子形状関数 $f(\rho)$ は

$$f(\rho) = 0; \quad 0 \le \rho \le 1$$

により与えられる。したがって(3.6)式右辺の積分項を零とおくことができるため，平端円柱圧子の P-h関係式として次式を得る；

$$P = 2a_0E'h \tag{3.9}$$

(3.9)式は，圧入荷重 P が圧入深さ h に対して直線的に増大し，その勾配は材料のヤング率 E' により規定されることを意味している。また，(3.4)式で $\chi(t) \equiv 2h/\pi$ となることに留意すると，接触領域($0 \le \rho \le 1$)における応力分布 $\sigma_z(\rho,0)$ は，(3.7)式，(3.9)式より

$$\frac{\sigma_z(\rho,0)}{p_m} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}; \quad 0 \le \rho < 1 \tag{3.10}$$

で与えられる。ここに，p_m は $p_m = P/\pi a_0^2$ で定義される平均接触

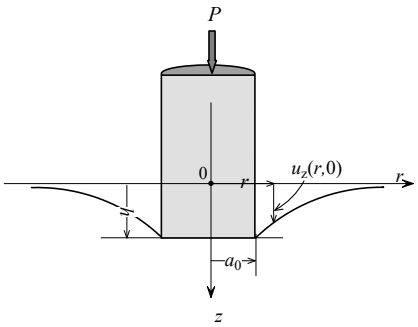


図 3.2　平端円柱圧子の圧入に伴う表面変形

圧を意味している。(3.10)式が示すように，接触圧力$-\sigma_z(\rho,0)$ は圧子中央($\rho=0$)で最小値$p_m/2$を取り，中心部から円柱外周部に向かうに従って増大し，$\rho\to 1$で∞へと発散する。

接触領域を囲む外周域$\rho\geq 1$における自由表面の変位(圧子圧入に伴う自由表面の沈み込み) $u_z(r,0)$ は $\chi'(t)=0$ および $\chi(1)=2h/\pi$ の関係を(3.8)式に代入することにより次式で表現できる；

$$\begin{aligned} u_z(\rho,0) &= \frac{2h}{\pi}\sin^{-1}\frac{1}{\rho} \\ &= \frac{1}{\pi E'}\frac{P}{a_0}\sin^{-1}\frac{1}{\rho} \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2 球形圧子(Hertz 接触問題)

図 3.3 に球形圧子(spherical indenter)(半径 R)の圧入に伴う材料表面の変形様式を示す。圧子形状関数は次式で与えられる；

$$\begin{aligned} f(\rho) &= R-\sqrt{R^2-a^2\rho^2} \\ &\approx \frac{1}{2}\frac{a^2}{R}\rho^2;\quad a\ll R \end{aligned} \tag{3.12}$$

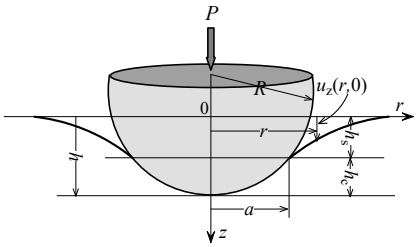


図 3.3 Hertz 接触による表面変形

以降，計算簡略化のために$a\ll R$を仮定して考察を進める。実際の圧子力学実験からも $a\leq 0.4R$ の範囲で，(3.12)式で示した近似が十分の精度で成立することが知られている。(3.12)式の近似を(3.4)式に代入することにより $\chi(t)$ は次式で表現できる；

$$\chi(t)=\frac{2}{\pi}\left[h-\frac{a^2}{R}t^2\right] \tag{3.13}$$

さらに，(3.6)式に(3.12)式を代入し，(3.7)式に(3.13)式を代入することにより

$$P=2aE'\left(h-\frac{1}{3}\frac{a^2}{R}\right) \tag{3.14}$$

$$\sigma_z(\rho,0)=-\frac{E'}{2a}\left[\frac{\chi(1)}{\sqrt{1-\rho^2}}+\frac{4a^2}{\pi R}\sqrt{1-\rho^2}\right];\quad 0\leq\rho\leq 1 \tag{3.15}$$

を得る。

前述の平端円柱圧子の場合，(3.10)式で示したように，圧子接触境界内側$\rho=1-\varepsilon$ ($\varepsilon\downarrow 0$)で$\sigma_z(\rho,0)\downarrow-\infty$，接触境界外側$\rho>1$の

自由表面では$\sigma_z(\rho,0)\equiv 0$と，z 方向接触応力は不連続的に変化する。これは，図 3.2 に示すように接触外周部$\rho=1$で自由表面が屈曲することに起因している。一方，Hertz 接触の場合，図 3.3 で示すように材料表面形状は，接触境界で圧子との接触面から自由表面へと滑らかに変化する。さらに，一般的な圧子接触問題においては，材料の表面自由エネルギー(表面張力)が無視できる程度に小さいことを考慮すると，接触応力$\sigma_z(\rho,0)$は$\rho=1-\varepsilon$ ($\varepsilon\downarrow 0$)で自由表面の値, すなわち$\sigma_z(1,0)=0$となる必要がある。この物理的必要条件を満たすためには(3.15)において,

$$\chi(1)=0 \tag{3.16}$$

でなければならない。その結果, 接触半径aおよび圧入荷重Pは, それぞれ，(3.13) ，(3.14)式を用い，実測可能な物理量である圧入深さhの関数として以下の様に簡潔に表現できる；

$$a=\sqrt{R}h^{1/2} \tag{3.17}$$

$$P=\frac{4}{3}E'\sqrt{R}h^{3/2} \tag{3.18}$$

また，接触応力は平均接触圧(mean contact pressure) $p_m=P/\pi a^2$を用い，(3.15)式から

$$\frac{\sigma_z(\rho,0)}{p_m}=-\frac{3}{2}\sqrt{1-\rho^2};\quad 0\le\rho\le 1 \tag{3.19a}$$

あるいは最大接触圧$p_0=(3/2)p_m$を用い

$$\frac{\sigma_z(\rho,0)}{p_0}=-\sqrt{1-\rho^2};\quad 0\le\rho\le 1 \tag{3.19b}$$

により表現できる。さらに，接触域外側($\rho>1$)自由表面のz方向変位(圧子の圧入により生じる自由表面の沈み込み，sink-in) $u_z(\rho,0)$は(3.8)式および(3.13)式から以下のように表現できる；

$$\begin{aligned}u_z(\rho,0)&=\frac{a^2}{\pi R\rho^2}\left[\left(2-\rho^2\right)\sin^{-1}\frac{1}{\rho}+\sqrt{\rho^2-1}\right]\\&=\frac{h}{\pi\rho^2}\left[\left(2-\rho^2\right)\sin^{-1}\frac{1}{\rho}+\sqrt{\rho^2-1}\right];\quad \rho\ge 1\end{aligned} \tag{3.20}$$

一方, 図 3.3 で定義したh_sは, (3.20)式に$\rho=1$を代入することにより$h_s\left(=u_z(1,0)\right)=h/2$となるため，最終的に，圧子接触深さ$h_c$は$h_c=h/2$で与えられる。したがって Hertz 接触(Hertzian contact)では相対接触深さ(relative contact depth) $\eta_c\left(=h_c/h\right)$は圧入深さに依存することなく常に

$$\eta_c\left(\equiv\frac{h_c}{h}\right)=\frac{1}{2} \tag{3.21}$$

となる。

3.3 円錐圧子

図 3.4 に円錐圧子(conical indenter)の圧入に伴う表面変形の様子を示す。圧子形状関数は圧子面傾き角度 β (inclined face-angle, β)を用い次式で与えられる；

$$f(\rho)=a\rho\tan\beta \tag{3.22}$$

したがって(3.4)式に(3.22)式を代入することにより Sneddon 関数 $\chi(t)$ は

$$\begin{aligned}\chi(t)&=\frac{2}{\pi}\left(h-ta\tan\beta\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t^2-x^2}}dx\right)\\&=\frac{2h}{\pi}-ta\tan\beta\end{aligned} \tag{3.23}$$

で与えられる。(3.23)式より $\chi(1)=2h/\pi-a\tan\beta$ の関係が存在し，しかも，前述した Hertz 接触同様に接触境界における物理的必要条件から $\chi(1)=0$ でなければならないことに留意すると，接触半径 a と圧入深さ h との間には次式の関係が成立する；

$$a=\frac{2\cot\beta}{\pi}h \tag{3.24}$$

さらに上述した Hertz 接触問題と同様の計算を行うことにより

$$P=\frac{2\cot\beta}{\pi}E'h^2 \tag{3.25}$$

$$\frac{\sigma_z(\rho,0)}{p_m}=-\cosh^{-1}\frac{1}{\rho};\quad 0<\rho\le 1 \tag{3.26}$$

$$u_z(\rho,0)=\frac{2h}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{1}{\rho}-\rho+\sqrt{\rho^2-1}\right];\quad \rho\ge 1 \tag{3.27}$$

を得る。 (3.27)式に $\rho=1$ を代入することにより，円錐圧子接触問題において相対接触深さ $\eta_c\left(=h_c/h\right)$ は次式で与えられる；

$$\eta_c\left(\equiv\frac{h_c}{h}\right)=\frac{2}{\pi} \tag{3.28}$$

上述した球形圧子の場合と同様，円錐圧子においても相対接触深さ $\eta_c\left(=h_c/h\right)$ は圧子圧入深さ h に依存することなく常に一定の値をとる。

上述した幾何形状を異にする代表的な 3 種類の圧子について，

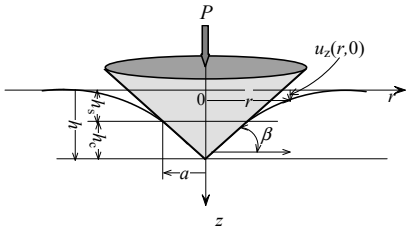


図 3.4 円錐圧子接触による表面変形

それぞれの接触圧力 $\sigma_z(\rho,0)/p_m$ と自由表面圧入変位 $u_z(\rho,0)/h$ を図 3.5 および図 3.6 に比較して示す。

圧子力学実験で実測可能な物理量である圧入荷重 P と圧入深さ h を用いて表現された(3.9), (3.18), および(3.25)式は実験から平面歪ヤング率 E' を求める際に重要となる関係式ではあるが，一見すると，「応力と歪が線形関係」にある弾性体の変形様式を表していないように見受けられる。しかし，これらの表現式を平均接触圧 $p_m\left(=P/\pi a^2\right)$ と圧入歪(indentation strain) ε_{I} を用いて書き直すことにより，一般化されたフック則，$p_m=E'\varepsilon_{\mathrm{I}}$，として一意的に表現出来ることが分かる。ここに圧入歪 ε_{I} は次式により定義される；

平端円柱圧子：
$$\varepsilon_{\mathrm{I}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{h}{a_0}\right) \tag{3.29}$$

球圧子：
$$\varepsilon_{\mathrm{I}}=\frac{4}{3\pi}\left(\frac{a}{R}\right) \tag{3.30}$$

円錐圧子：
$$\varepsilon_{\mathrm{I}}=\frac{\tan\beta}{2} \tag{3.31}$$

ここで，平端円柱圧子や球圧子とは異なり，円錐圧子の圧入歪 ε_{I} は圧子の圧入深さ h に依存しないことに注意を払っておきたい。この事実は，(3.24)式で示したように，円錐圧子の場合，接触半径 a が圧入深さ h に比例する，すなわち，「圧子形状の幾何相似性(geometrical similarity)」に起因している。力学物性の実験定量において，幾何相似性を有する円錐圧子やピラミッド圧子が広く用いられているのは，上述した「圧入歪 ε_{I} が圧子の圧入深さ h に依存しない」ためであり，これにより，弾性域のみならず後述の弾塑性・粘弾性域における圧子力学解析をも容易ならしめている。

先に述べたように圧入歪 ε_{I} の概念を導入することにより，形状を異にする圧子に対して，平均接触圧 $p_m\left(=P/\pi a^2\right)$ と圧入歪 ε_{I} との間には，一律，次式で表される「線形」の関係が成立する；

$$p_m\left(=P/\pi a^2\right)=E'\varepsilon_{\mathrm{I}} \tag{3.32}$$

「完全弾性体」に対するこの普遍的かつ簡潔な線形表現式は圧子力学の本質が接触面積 $A(=\pi a^2)$ により規定されるという重要な事実を示唆している。弾性解析のみならず弾塑性解析においても圧入荷重 P と接触面積 A の計測が圧子力学実験において極めて重

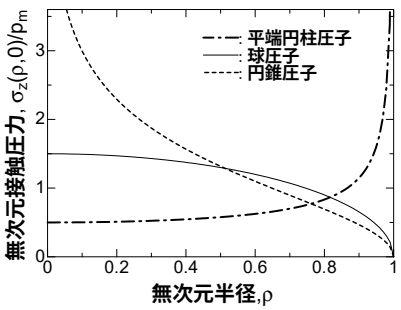


図 3.5 異なる圧子形状における接触圧力分布

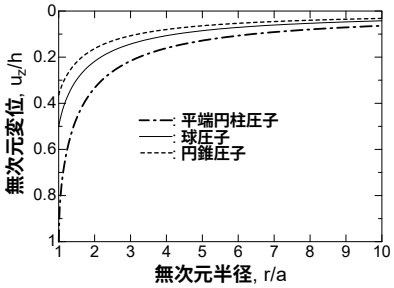


図 3.6 異なる圧子形状における自由表面（$r/a\geq 1$）の圧入変位 $u_z(\rho,0)/h$

要かつ本質的となることを第 4 章以降でより詳細に論じる。

第 3.1 節から第 3.3 節で考察した幾何形状を異にする各種軸対称圧子の力学応答の表現式の中で，実験により力学物性を評価するに当たって，特に重要となる関係式，P-h，$a-h$ および $a-P$ 関係式，について，これらの現象論的表現を次式および表 3.1 にまとめて示しておく。

$$P = k_h E' h^n \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} a\left(\equiv \sqrt{A/\pi}\right) &= Bh^{n-1} \\ &= CP^{(n-1)/n} \end{aligned} \tag{3.34}$$

表 3.1　圧子力学パラメーター一覧

	平端円柱圧子	球形圧子	円錐圧子
$f(\rho)$	0	$\left(a^2/2R\right)\rho^2$	$a\rho\tan\beta$
$\sigma_z(\rho,0)/p_m$	$-1/2\sqrt{1-\rho^2}$	$-3\sqrt{1-\rho^2}/2$	$-\cosh^{-1}(1/\rho)$
n	1	$3/2$	2
k_h	$2a_0$	$4\sqrt{R}/3$	$2\cot\beta/\pi$
B	a_0	$\sqrt{R}$	$2\cot\beta/\pi$
C	a_0	$\left(3/4E'\right)^{1/3} R^{1/3}$	$\sqrt{2\cot\beta/\pi E'}$
h_c/h	1	$1/2$	$2/\pi$
ε_1	$2h/\pi a_0$	$(4/3\pi)(a/R)$	$\tan\beta/2$

* $\rho = r/a$

4 塑性発現規範と圧子接触問題

金属・セラミック材料を含む多くの工業材料は微小変形下で弾性挙動を示す。弾性変形を誘起する力学的仕事は，これら固体を構成する原子・分子間距離の可逆的な変化として系のエンタルピー増大ΔH，ひいては Gibbs 自由エネルギーΔGの増大をもたらす。一方，ゴム・高分子材料の弾性変形においては，外部仕事は構成分子鎖の変形に伴うエントロピー減少$\Delta S(<0)$をもたらし，その結果，自由エネルギー$\Delta G(\approx -T\Delta S)$の増大として系に蓄積される。このため，前者の弾性変形はエンタルピー弾性，後者は，エントロピー弾性と呼ばれている。外部負荷･拘束を取り去ると，変形により増大した自由エネルギーは系外へと開放され，その結果，これらの弾性固体は変形前の形状・寸法へと可逆的に回復する(reversible recovery)**[1-2, 1-3]**。

弾性変形には限界，弾性限界(elastic limit)，があり，この限界点(降伏点)を越えてさらに変形を加えると, 外部負荷･拘束を取り去った後でも注目する固体は，もはや元の形状・寸法に回復することはなく有限の変形(塑性変形)(plastic deformation)が残留してしまう。図 4.1 に塑性変形を伴う丸棒の単純伸長・圧縮における応力－歪曲線を定性的に示す。図中に示したYは伸長・圧縮変形における降伏応力(yielding stress, yielding strength)と称され，弾性限界を規定する特性応力である。応力σが$0 \le \sigma < Y$の範囲にある弾性域では注目する固体は可逆的な弾性変形を示す。一方，応力σが降伏応力Yを上回る領域($\sigma \ge Y$)は塑性域と呼ばれ, この領域では弾性変形に加え塑性変形も誘起される。すなわち,

$$\sigma \ge Y \tag{4.1}$$

が塑性変形の発現規範(criterion)となる。完全徐荷後の残留歪ε_p(図 4.1 参照)は塑性域において生じた非可逆的な塑性歪量を表している。

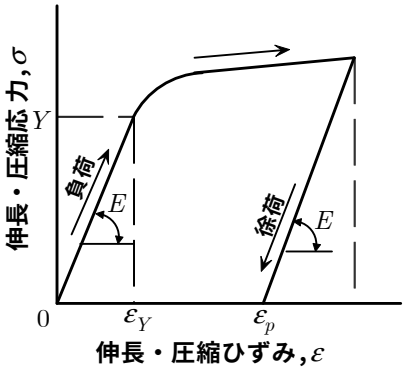


図 4.1 弾塑性変形を伴う応力σ - 歪ε 曲線

典型的な弾塑性体である金属材料を例に，以下，塑性変形の発現機構を微視的に考察する。3 次元的な外部負荷により金属結晶内部には法線変形とずり変形が誘起される(第 1 章参照)。これらの変形のうち，ずり変形により生じる原子面間の相対的な滑りが塑性変形を引き起こす。微小ずり変形に留まっている限りは，この原子面間の相対的な滑りは，ずり弾性率G (shear modulus, G)で記述される可逆的な弾性変形となるが，弾性限界を越えるずり

応力τを付加すると, 原子面間の相対的な滑りは非可逆的となり, 塑性変形へとつながる。ずり変形の弾性限界を規定するずり応力(ずり変形に対する降伏応力)をkで表すと, 塑性変形発現規範は次式で与えられる。

$$\tau \geq k \tag{4.2}$$

上記の単純伸長・圧縮や単純ずり変形とは別に，一般的に観察される，複雑な 3 次元応力・歪状態での塑性の発現は如何なる応力規範に則って生じるかを次に考察する。

4.1　最大ずり応力規範 (Tresca Criterion)

丸棒の両端に単純伸長応力σを付加すると丸棒の軸に対して45°傾いた面内でずり応力τは最大値$\tau_{\max} = \sigma / 2$となる。したがって最大ずり応力規範では

$$\max\{\sigma\} \geq 2k = Y \tag{4.3}$$

の関係が成り立つ。より一般的な 3 次元応力状態における Tresca 規範は次式で表される。

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} \geq 2k = Y \tag{4.4}$$

上式でσ_1, σ_2, σ_3は 3 次元応力状態における主応力を意味する。任意の 3 次元応力状態では, 図 1.2 あるいは図 1.3 に示すように, 任意の面には法線応力σ_iと共にずり応力τ_{ij}が存在する。しかし, これらの応力を記述している座標軸，例えば(x, y, z)座標系を座標の原点周りに回転させることにより，図 4.2 で示すように，全てのずり応力成分の存在しない，すなわち，$\tau_{ij} = 0$となるように新たな座標軸系$(1,2,3)$を選ぶことができる。それぞれの座標軸, 1-, 2-, 3-軸は主軸(principal axis)と呼ばれ，面の法線が主軸方向にある面は主平面と呼ばれ, この平面上には, ずり応力が存在せず, 主応力と呼ばれる法線応力のみが存在する。図 4.2 の白破線で囲まれた面内に生じているずり応力τは主応力σ_1とσ_2により誘起される。その最大値$\tau_{\max}$は(4.3)式と類似の考察により$\tau_{\max} = |\sigma_1 - \sigma_2| / 2$と表現できる。したがって塑性変形規範として

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|\} \geq 2k = Y \tag{4.5}$$

を得る。さらに(4.5)式のより一般的な 3 次元拡張表記として先に示した(4.4)式が得られる。

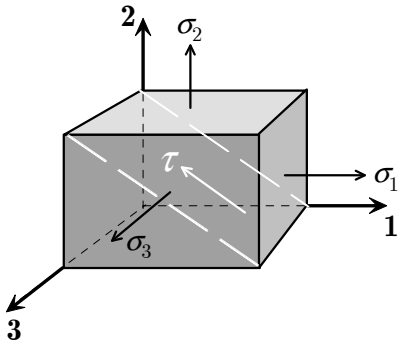


図 4.2　主軸と主応力

4.2　最大ずり歪エネルギー規範 (von Mises Criterion)

塑性変形の著しい多くの金属材料では，上記の Tresca 規範よりも以下に示す von Mises(フォンミーゼス)規範のほうが，より定量的に実験結果を再現することが知られている。3 次元応力-歪状態にある単位体積の立方体(図 1.2; $dx = dy = dz = 1$)に蓄えられている弾性歪エネルギー密度U は次式により与えられる；

$$U = (1/2)(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

上式に(2.1)式を適用し，U を応力成分のみで書き直すことにより最終的に次式を得る；

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E}\left\{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \\ &= \frac{1}{2K}\sigma_m^2 + \frac{1+\nu}{6E}\left\{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここに K は体積弾性率(bulk modulus)を意味し $K = E/3(1-2\nu)$ によりヤング率 E に関係付けられる。平均法線応力 σ_m は $\sigma_m = \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)/3$ で定義される。(4.6)式の第二式右辺第一項は体積変化に伴う歪エネルギーを意味しており，右辺第二項および三項がずり歪エネルギーU_{S}を表している。いま，x，y，z 座標を主応力方向に取ると，図 1.2 で示したずり応力成分，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}，は図 4.2 で示すように 0 となり存在しなくなるので，ずり歪エネルギーU_{S}は主応力σ_1，σ_2，σ_3のみを用い

$$U_{\mathrm{S}} = \frac{1+\nu}{6E}\left\{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right\} \tag{4.7}$$

と表現できる。単純伸長試験を行い $\sigma_1 = Y$，$\sigma_2 = 0 = \sigma_3$ で降伏した場合，$U_{\mathrm{S}}(\mathrm{Tension}) = (1+\nu)Y^2/3E$ となり，この値が塑性変形を誘起する限界ずり歪エネルギーを与える。一方，上記と同一の材料に対して純ずり試験を行い，$\sigma_1 = -\sigma_2 = k$，$\sigma_3 = 0$，で降伏した場合，(4.7)式から $U_{\mathrm{S}}(\mathrm{PureShear}) = (1+\nu)k^2/E$ を得る([注]純ずり試験では平均法線応力 $\sigma_m = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)/3$ が 0 となるので試験体には，ず

り変形のみが誘起される)。降伏点では両試験で得られた限界ずり歪エネルギーは等しくなければならない，すなわち，$U_S(\text{Tension}) = U_S(\text{PureShear})$ の等価条件より von Mises 規範では，$Y = \sqrt{3}k$ の関係が存在する。これらの限界歪エネルギーを(4.7)式に適用することにより塑性変形を規定する von Mises 規範として次式を得る；

$$\frac{1}{2}\left\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right\} \geq Y^2 = 3k^2 \qquad (4.8)$$

4.3　球形圧子接触と塑性の発現

球形圧子接触を例に圧子圧入時に生じる圧子直下での塑性発現の様子を以下に考察する**[4.1]**。球形圧子の圧入に伴い誘起される主応力 $\sigma_1(=\sigma_r)$，$\sigma_2(=\sigma_\theta)$，$\sigma_3(=\sigma_z)$ は，共に圧入軸(z 軸)上で最大値を取るため，塑性変形の起点は z 軸上($\rho = 0$ ；第 3.2 節参照)にある。これらの主応力は(2.30)式～(2.32)式，(3.5)式，および(3.13)式を用いることにより，それぞれ，以下のように表現することができる；

$$\frac{\sigma_r}{p_0}\left(\equiv\frac{\sigma_\theta}{p_0}\right) = -(1+\nu)\left(1-\varsigma\tan^{-1}\frac{1}{\varsigma}\right)+\frac{1}{2\left(1+\varsigma^2\right)} \qquad (4.9)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{1}{1+\varsigma^2} \qquad (4.10)$$

ここに，p_0 は(3.19b)式で定義した最大接触圧，$\varsigma = z/a$ は圧子接触半径 a で規格化した無次元 z 座標を意味する。さらに，塑性発現規範の考察で上述したように塑性変形を誘起する最大ずり応力 $\tau_{\max}(=|\sigma_r-\sigma_z|/2)$ ((4.5)式参照)は，(4.9)式および(4.10)式を用い次式で表現される；

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\max}}{p_0} &= \frac{|\sigma_r-\sigma_z|}{2p_0}\\ &= \frac{1}{2}\left|-(1+\nu)\left(1-\varsigma\tan^{-1}\frac{1}{\varsigma}\right)+\frac{3}{2\left(1+\varsigma^2\right)}\right|\end{aligned} \qquad (4.11)$$

ポアソン比 $\nu = 0.3$ を例に，無次元最大ずり応力 $\tau_{\max}/p_0$ を無次元 z 座標 $\varsigma(=z/a)$ に対してプロットした関係を図 4.3 に示す。図に示すように，ずり応力は圧入軸に沿って，$z = 0.48a$ において，その最大値 $\tau_{\max} = 0.31p_0$ に到達する。したがって Tresca 規範，

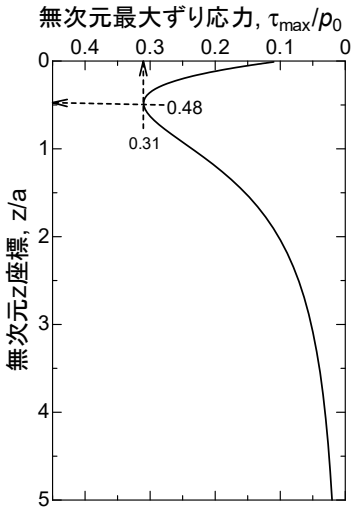


図 4.3　Hertz 接触により誘起される圧入軸に沿った無次元最大ずり応力 $\tau_{\max}/p_0$ （(4.11)式）

[4.1] K.L. Johnson, “Contact Mechanics”, Cambridge University Press (1985)

$2\tau_{\max} = \left(\max\left\{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|\right\}\right) \geq 2k = Y$ では

$$p_0 = \frac{3}{2} p_m \geq 3.2k = 1.6Y \tag{4.12}$$

一方，Von Mises 規範，$\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 \geq 3k^2 = Y^2$ では

$$p_0 \geq 2.8k = 1.6Y \tag{4.13}$$

が塑性発現の敷居値を規定する。以上の考察より，$p_0 = (3/2)p_m$ および $p_m = P/\pi a^2$ の関係を(4.12)式あるいは(4.13)式に代入し，また球形圧子接触においては塑性発現に至る最小圧入荷重(塑性発現の敷居圧入荷重) P_Y が Hertz 理論の弾性限界値で与えられることに留意し，最終的に次式を得る；

$$P_Y = (1.6)^3 \frac{\pi^3 R^2}{6} \frac{Y^3}{E'^2} \tag{4.14}$$

球形圧子接触での塑性発現抵抗性は Y^3/E'^2 と共に増大する，すなわち，低弾性率高降伏応力を有する弾塑性体ほど球圧子圧入における塑性発現抵抗性が増大することを(4.14)式は示唆している。

von Mises 規範に則った弾塑性体が P_Y の圧入荷重を受けた際に誘起される塑性域の様子（有限要素法(finite element method, FEM)により数値解析した結果）を図 4.4 に示す(有限要素法を用いた数値圧子力学の詳細は第 10 章で論じる)。図に示すように，圧入荷重 P が(4.14)式で示した敷居荷重 P_Y に至ると $z = 0.48a$ の位置に「塑性核」が出現する。

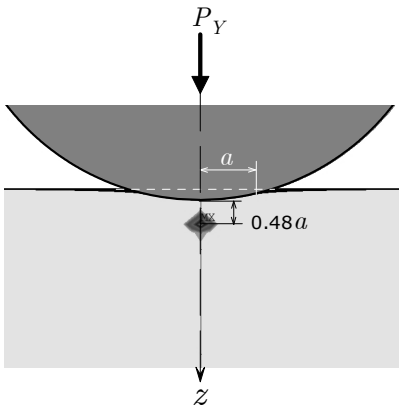


図 4.4 球圧子圧入の敷居荷重 P_Y において $z = 0.48a$ の位置に生じた塑性核(有限要素法解析結果)

5 弾塑性圧子力学

5.1 Meyer 硬度の材料物理学

蒸気機関車が出現した 19 世紀後半，軌道(レール)と車輪間での接触現象，特に接触に伴い生じる金属材料の塑性変形(plastic deformation)に関する科学と工学が大きく発展した。20 世紀に入ると，金属材料の塑性を評価する簡便な試験法として，「圧子押し込み硬さ，圧子圧入硬度 (indentation hardness)」の概念およびその試験法が提案された。代表的な硬度試験法として，高剛性金属球を圧入する「Brinell 硬度試験」(Johan August Brinell, 1900 年)，や正四角錐ダイヤモンド圧子を用いた「Vickers 硬度試験」(Vickers Ltd., 1925 年)を挙げることができる。これらの試験法で求められる圧入硬度 H は圧子圧入荷重 P を圧入による塑性変形で形成された残留圧痕(residual impression)の寸法から算出された圧子接触面積 S で除した値,

$$H = \frac{P}{S}$$

として一般的に定義される。これらの各種硬度試験法は，現在，規格化・標準化が進み，測定方法や硬度算出方法等の詳細についての規格書を容易に入手することが出来る**[5.1]**。

圧入硬度が持つ「材料物理学的な意味」，すなわち，「力学物性値」としての硬度に関する考察は E. Meyer (1908)の研究に端を発している。Meyer は圧入荷重 P を，これにより生じた圧痕の正射影面積(投影面積) A_{proj} で除した値として圧子硬度(Meyer 硬度, H_{M})

$$H_{\mathrm{M}} = \frac{P}{A_{\mathrm{proj}}} \tag{5.1a}$$

を定義することが材料力学的・物理学的な意味を考察する上で本質的に重要であることを球圧子および円錐圧子に関する理論考察から明らかにした。塑性の著しい金属材料の場合，最大圧入時に観測される圧子/材料表面間の接触投影面積 A (projected contact area, A)と除荷後に観測される残留圧痕の投影面積 A_{proj} は，ほぼ一致する。すなわち，$A \simeq A_{\mathrm{proj}}$ と近似できる。しかし，圧子圧入時に誘起される弾性変形の寄与が大きく，これが塑性変形に比して無視できないセラミック材料や高分子材料の場合，徐荷時に生じ

[5.1] 例えば,
「ブリネル硬さ試験 -試験方法」
JIS Z2243 (2018)
「ビッカース硬さ試験 -試験方法」
JIS Z2244 (2009)
「ロックウェル硬さ試験-試験方法」
JIS Z2245 (2016)
「ショア硬さ試験 -試験方法」
JIS Z2246 (2000)

る弾性回復(elastic recovery)のため，一般的に言って，$A > A_{\mathrm{proj}}$ の関係が存在する。したがって圧子力学試験において硬度のみならず「弾性」および「塑性」を同時定量するためには，弾性回復後の「残留圧痕投影面積 A_{proj}」ではなく，圧入時の「圧子/材料表面間接触投影面積 A」を用い，次式で改めて Meyer 硬度を定義しておく必要がある；

$$H_{\mathrm{M}} = \frac{P}{A} \tag{5.1b}$$

後述するように，負荷時接触投影面積 A は圧子力学の本質を理解する上で極めて重要な物理量となるため，本書では，以降，(5.1b)式で定義される Meyer 硬度を用い理論考察を展開していく。しかし，「圧痕の投影面積 A_{proj}」と異なり，圧子負荷時に生じる「圧子/材料表面間接触投影面積，A」の実験的計測には多くの困難を伴う。事実，汎用の計装化インデンテーション計測装置(conventional instrumented indentation apparatus)では，圧子接触投影面積 A の実測は不可能であり硬度のみならず各種の圧子力学物性値(弾性率，降伏応力，粘弾性関数等)の厳密定量が不可能となる。この計測技術上の困難を回避するため，圧子の負荷徐荷過程で実測可能な圧子圧入荷重 P と圧入深さ h の関係，すなわち，実測された P-h 関係に<u>各種の仮定・近似を適用</u>することにより推算した圧子接触投影面積 A を用い各種の力学物性値を推算しなければならない。この極めて本質的な計測技術上の問題を解決するために計装化顕微インデンテーション計測装置（顕微インデンター）(instrumented indentation microscope)が開発された。顕微インデンターの原理・構造，並びに計測データ解析等の詳細は第 11.3 節で論じられる。

塑性変形を伴わない「完全弾性体」の Meyer 硬度を先ず考えてみる。圧入荷重 P で生じる圧子/材料表面間接触投影面積を A_{e} (添え字の e は elasticity を意味する)とすると，完全弾性体の Meyer 硬度は(3.32)式より，次式で与えられる；

$$H_{\mathrm{M}}\left(=\frac{P}{A_{\mathrm{e}}}\right) = \varepsilon_{\mathrm{I}} E' \tag{5.2}$$

ここに ε_{I} は(3.29)～(3.31)式で定義した圧入歪であり圧子形状のみならず平端円柱圧子および球形圧子では圧入量にも依存する。これらの圧入歪を(5.2)式に代入することにより完全弾性体

(perfectly elastic body) の Meyer 硬度は次式で表現できる；

平端円柱圧子：　$$H_{\mathrm{M}} = \frac{2}{\sqrt{\pi A_0}} h \cdot E' \tag{5.3}$$

球形圧子：　$$H_{\mathrm{M}} = \frac{4}{3\pi^{3/2} R} \sqrt{A_{\mathrm{e}}} \cdot E' \tag{5.4}$$

円錐圧子：　$$H_{\mathrm{M}} = \frac{\tan\beta}{2} \cdot E' \tag{5.5}$$

平端円柱圧子の場合，円柱断面積 A_0 (一定値)が圧子接触面積となる事実に留意すると，Meyer 硬度 H_{M}は圧子接触面積ではなく，圧入深さ h と共に変化する($H_{\mathrm{M}} \propto h$)。一方，球形圧子の場合，Meyer 硬度 H_{M}は(5.4)式に見るように, 圧子接触面積 $\sqrt{A_{\mathrm{e}}}$ と共に変化する($H_{\mathrm{M}} \propto \sqrt{A_{\mathrm{e}}}$)。これらの圧子形状とは異なり, (5.5)式から分かるように，円錐圧子においては硬度が圧入量に依存することなく一定値となる。硬度等をはじめ多くの力学物性評価において円錐圧子(Rockwell 圧子)やピラミッド圧子(Vickers 圧子，Berkovich 圧子)等の自己幾何相似性を保つ圧子形状が多用されてきたのは，この事実，すなわち計測された硬度が圧子圧入量に依存することなく一定値となる事実に起因している。

圧入歪 ε_{I} を暫時増大させていき，その値が弾性限界(elastic limit)(図 4.1 参照)に到達することにより生じる塑性の発現を次に考えてみる。円柱圧子の場合，圧入深さ h を暫時増大させることにより，球圧子の場合には圧入深さ h の漸増あるいは，より小さな半径 R を有する圧子を用いることにより，そして，円錐圧子の場合は頂角のより鋭い，すなわち，面傾き角度 β のより大きな圧子を用いることにより圧入歪 ε_{I} を増大させることができる。その結果，ε_{I} が塑性発現に関わる敷居歪値 $\varepsilon_{\mathrm{IY}}$ に到達すると，球形圧子について図 4.4 にその一例を示したように，塑性核(plastic core)が発現する。この敷居歪(threshold strain) $\varepsilon_{\mathrm{IY}}$ での Meyer 硬度は(4.12)および(4.13)式より Tresca 規範，von Mises 規範共に，

$$H_{\mathrm{M}}\left(= \varepsilon_{\mathrm{IY}} E'\right) \approx Y \tag{5.6}$$

により与えられることが分かる。すなわち，ε_{I} の増大に伴い, (5.2)式で与えられる弾性応答としての Meyer 硬度 $\varepsilon_{\mathrm{I}} E'$ の値が降伏応力 Y の値にまで到達すると塑性の発現が始まる。

多くの「延性材料」では圧子圧入に伴い，弾性変形が無視できるほどに塑性変形が進行するため，これらの延性材料は「完全塑

性体」として分類される。完全塑性体(perfectly plastic body; fully plastic body)に圧入荷重Pで圧子を圧入した際に観測される圧子/材料表面間接触投影面積をA_{p}(添え字のpはplasticityを意味する)とすると，完全塑性体のMeyer硬度は，付加した圧入歪ε_{I}に依存することなく常に次式で表現できる；

$$H_{\mathrm{M}}\left(=\frac{P}{A_{\mathrm{p}}}\right)=cY \tag{5.7}$$

圧子圧入に伴い圧子周辺部で誘起される塑性変形の多くは，これを取り巻く弾性場に収容される。しかし，塑性変形が著しく，弾性場での収容限界を超過すると余剰の塑性変形はパイルアップ(pile-up)として自由表面に流出する。一方，自由表面が有する表面エネルギーは面内からの塑性流出を抑制し面内に「拘束」する抵抗として作用する。(5.7)式の**拘束因子**c（constraint factor, c）は，この塑性流動の面内拘束を定量記述する因子であり，圧子形状や圧子/材料表面間の摩擦係数に依存し，$2.5 \le c \le 3.5$で与えられることが実験結果および有限要素数値解析結果から知られている**[4.1]**。

以上の考察より，弾塑性圧子圧入挙動を以下に示す三つの領域に大別することができる**[4.1]**；

$H_{\mathrm{M}} < Y$ ：　完全弾性領域(elastic region)　(5.8a)

$Y \le H_{\mathrm{M}} < cY$:　弾塑性領域(elastoplastic region)　(5.8b)

$H_{\mathrm{M}} \approx cY$:　完全塑性領域(fully plastic region)　(5.8c)

完全弾性領域では(5.2)式より Meyer 硬度は$H_{\mathrm{M}} = \varepsilon_{\mathrm{I}} E'$で与えられるため，この関係式を(5.8a)式に代入することにより，完全弾性領域($H_{\mathrm{M}}/Y < 1$)を次式で規定することができる；

$$\frac{\varepsilon_I E'}{Y} < 1 \tag{5.9}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{2}{\pi}\frac{h}{a_0} \text{ ；円柱圧子}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{4}{3\pi}\frac{a}{R} \text{ ；球形圧子}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{\tan\beta}{2} \text{ ；円錐圧子}$$

すなわち，弾性率E'，降伏応力Yを有する任意の弾塑性体への圧子圧入において，付加した圧子歪ε_{I}が$\varepsilon_I E'/Y < 1$を満足する領域では，その変形挙動は常に完全弾性変形となり，この領域での

Meyer 硬度は先に示したように，$H_{\mathrm{M}} = \varepsilon_{\mathrm{I}} E'$ により表現でき，「Meyer 硬度は試験体の弾性率 E' を表す圧子力学パラメータとなる」。一方，$\varepsilon_{\mathrm{I}} E'/Y > 1$ の条件が成立する弾塑性領域まで圧子付加歪 ε_{I} を増大させると，「Meyer 硬度は試験体の弾性率 E' と降伏応力 Y を変数とした弾塑性圧子力学パラメータとなる」。さらに，完全塑性領域では，「Meyer 硬度は試験体降伏応力 Y を表す圧子力学パラメータとなる」。

$\varepsilon_{\mathrm{I}} E'/Y > 1$ の条件が成立する弾塑性領域における Meyer 硬度 H_{M} を E' および Y の関数として定量記述する解析モデルについて以下にその詳細を論じる。

(1) Cavity モデル[4.1]

弾塑性領域における Meyer 硬度を弾性率 E' および降伏応力 Y を用いて記述する「Cavity モデル」を図 5.1 に示す。面傾き角度が β (図 3.4 参照) である円錐圧子を接触半径が a となるまで弾塑性体表面に圧入した際に圧子直下に生じる平均接触圧力 $p_m \left(= P/\pi a^2\right)$，この接触圧力が等方的に作用している半径 a の「圧入核(Cavity)」，この核を取り囲む半径 b の塑性域($a < r \le b$)，さらに，その外周に弾性域($r > b$)の広がるモデルを考える。圧入核の体積($\equiv (2\pi/3) a^3$)は圧子圧入により排除された物質の体積を表しており，この排除された物質量は圧入核を取り囲む塑性域を介して最終的には全て弾性変形として弾性域に収容されると仮定している。このモデルは内面に静水圧 p_m が作用する半径 a の表面空孔(cavity)を塑性域と弾性域が取り囲む半無限平面の弾塑性問題に帰着される。Cavity モデルを用いることにより弾塑性域における Meyer 硬 $H_{\mathrm{M}} (\equiv p_{\mathrm{m}}) = P/\pi a^2$ は最終的に次式により表現できる **[4.1]**；

$$\frac{H_{\mathrm{M}}}{Y} = \frac{2}{3}\left[2 + \ln\left(\frac{(1+\nu)}{3}\varepsilon_{\mathrm{I}}\frac{E'}{Y} + \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\right)\right] \tag{5.10a}$$

ポアソン比が $\nu = 1/2$ で与えられる非圧縮性弾塑性体の場合，(5.10a)式は次式により簡潔に表現される；

$$\frac{H_{\mathrm{M}}}{Y} = \frac{2}{3}\left[2 + \ln\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{I}}\frac{E'}{Y}\right)\right] \tag{5.10b}$$

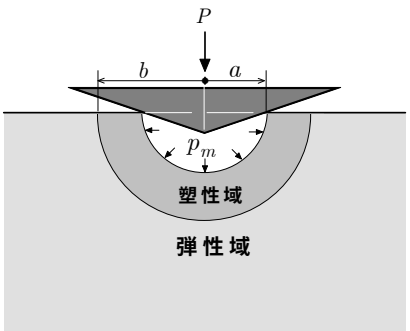


図 5.1 Cavity モデル**[4.1]**。平均接触圧力 $p_m \left(= P/\pi a^2\right)$ が等方的に作用している半径 a の空孔(cavity)，これを取り巻く厚さ b の塑性球殻域，さらにその外周部に広がる弾性域を想定し，円錐圧子直下の力学場を記述する

Cavity モデルは弾塑性域における圧子圧入挙動を記述したモデルであるため，完全弾性域～弾塑性域～完全塑性域に至る全領域での圧子圧入挙動を記述することはできない。

(2) 排除体積加成則モデル

完全弾性域から完全塑性域に至る全ての領域における圧子力学挙動を定量記述する統一理論(排除体積加成則理論)(the unified theory for the additivity in the excluded volume of indentation) を以下に示す。現象論(エネルギー論)に基づいた理論であるため任意のモデルを用い議論を進めることができるが，本節では図 5.1 に示した Cavity 内面に作用する接触圧力 $p_m\left(=P/\pi a^2\right)$ の仮想増分 δp により誘起される仮想排除体積増分 δV を想定し，これに伴う自由エネルギーの増分(δG)を考える。この自由エネルギー増分，すなわち外部から投入された仕事 $\delta W\left(\equiv \delta G\right)$ を次式により記述することが出来る；

$$\delta W\left(\equiv p_{\mathrm{m}}\delta V\right)=p_{\mathrm{m}}\delta V_{\mathrm{e}}+p_{\mathrm{m}}\delta V_{\mathrm{p}} \tag{5.11}$$

ここに δV は注目する弾塑性体の圧子排除体積増分，δV_{e} は弾性変形に関わる圧子排除体積増分，そして δV_{p} は塑性変形・流動に伴う圧子排除体積増分を表す。(5.11)式の右辺第一項($p_{\mathrm{m}}\delta V_{\mathrm{e}}$)は圧子の圧入に伴う系の弾性歪エネルギー増分を表しており，右辺第二項($p_{\mathrm{m}}\delta V_{\mathrm{p}}$)は塑性流動に伴うエネルギー散逸を表している。(5.11)式において全排除体積増分は $\delta V=\delta V_{\mathrm{e}}+\delta V_{\mathrm{p}}$ と表現出来るため, 最終的に次式で示す「排除体積加成則」が成立する；

$$V=V_{\mathrm{e}}+V_{\mathrm{p}} \tag{5.12}$$

さらに，面傾き角度 β の円錐圧子の場合，その排除体積は $V=\left(\tan\beta/3\sqrt{\pi}\right)\cdot A^{3/2}$ により, そして, 半径 R の球形圧子の場合, その排除体積は $V=\left(1/6\pi R\right)\cdot A^2$ ($a/R\ll 1$)により，すなわち, $V\propto A^m$ (円錐圧子： $m=3/2$ ；球形圧子： $m=2$)により接触面積 A に相似則で関連付けられることに留意すると, (5.12)式で与えた排除体積加成則から最終的に圧子接触面積に関わる次式を得る；

$$A^m=A_{\mathrm{e}}{}^m+A_{\mathrm{p}}{}^m \tag{5.13a}$$

あるいは,

$$\frac{A_{\mathrm{p}}}{A}=\left[\frac{\left(A_{\mathrm{p}}/A_{\mathrm{e}}\right)^{m}}{1+\left(A_{\mathrm{p}}/A_{\mathrm{e}}\right)^{m}}\right]^{1/m} \tag{5.13b}$$

ここに，A は圧入荷重 P で圧子を注目する弾塑性体(弾性率 E'，降伏応力 Y)に圧入した際に生じる圧子接触面積を表しており，A_{e} および A_{p} は，それぞれ，同一の圧入荷重 P で同一の圧子を完全弾性体(弾性率 E')あるいは完全塑性体(降伏応力 Y)に圧入した際に生じる，それぞれの圧子接触面積を表している。$A=P/H_{\mathrm{M}}$ ((5.1b)式)，$A_{\mathrm{e}}=P/\varepsilon_{\mathrm{I}}E'$ ((5.2)式)および $A_{\mathrm{p}}=P/cY$ ((5.7)式)を(5.13b)式に代入することにより弾塑性体の Meyer 硬度 H_{M} は次式を用いて弾性率 E' および降伏応力 Y に関係付けられる；

$$\frac{H_{\mathrm{M}}}{cY}=\left[\frac{\left(\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{I}}E'}{cY}\right)^{m}}{1+\left(\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{I}}E'}{cY}\right)^{m}}\right]^{1/m} \tag{5.14}$$

$m=3/2$ ；　円錐圧子

$m=2$ ；　球形圧子

上記の(5.13b)式と(5.14)式で与えた二つの異なる表現式は，それぞれ，圧子力学的には等価な表現式である。第 11.3 節で詳述する計装化顕微インデンテーション計測装置を用いることにより接触面積 A を実験から直接求めることができるため，接触面積表記で与えられた(5.13b)式は，各種の弾塑性物性値のみならず第 7 章で詳述する各種の粘弾性関数を実験から定量評価する際に重要な役割を担う。(5.14)式の変数 $\varepsilon_{\mathrm{I}}E'/cY\left(\equiv A_{\mathrm{p}}/A_{\mathrm{e}}\right)$ は圧子圧入により弾塑性体内に誘起される塑性変形と弾性変形の比，すなわち，弾性変形に対する相対的な塑性変形の割合を表現しており，本書ではこの変数を**塑性歪**あるいは**塑性変形能(plastic index; *PI*)**として定義しておく。

Cavity モデル((5.10a)式, (5.10b)式)と排除体積加成則理論((5.13b)式, (5.14)式)との相違を図 5.2 に示す。先に述べたように Cavity モデルの適用は，モデルの性格上，弾塑性域のみに限定されるが，排除体積加成則理論では，完全弾性域～弾塑性域～完全塑性域に至る全領域で統一的に圧子圧入挙動を記述することができる。ま

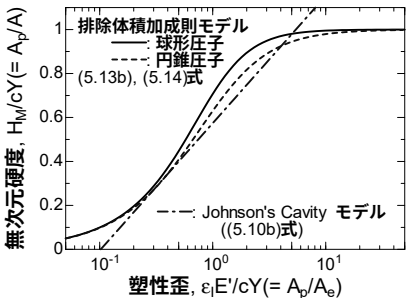


図 5.2 無次元硬度と塑性歪の関係。一点鎖線は Johnson's Cavity モデルを表す。破線（円錐圧子）および実線（球形圧子）は排除体積加成則モデル（(5.13b)式，(5.14)式）を示す

た，図 5.2 および(5.14)式に見るように，圧子力学挙動は圧子形状(球形圧子，円錐圧子)にも依存しており，これらの弾性/塑性変形様式は塑性歪 PI を用い以下のように記述することができる；

完全弾性域：	$PI<0.2$	球形圧子
		円錐圧子
弾塑性域：	$0.4 \le PI<8$	球形圧子
	$0.4 \le PI<20$	円錐圧子
完全塑性域	$PI \ge 8$	球形圧子
	$PI \ge 20$	円錐圧子

「排除体積加成則理論」の妥当性・信頼性に関する有限要素数値解析結果を用いた検証を図 5.3 に示す。図に示すように，**排除体積加成則モデルは極めて高精度で有限要素数値解析結果を再現していることが分かる**。

上述した弾塑性圧子力学理論は軸対称各種圧子の圧入に伴う弾塑性変形を対象にした汎用理論ではあるが，(3.29)式および(3.30)式に示したように，平端円柱圧子および球圧子の場合，圧入歪 ε_{I} が圧入深さ h あるいは接触半径 a に依存する。この事実は，汎用の実験装置で求めることのできる圧入荷重 P と圧入深さ h のデータ(P - h 曲線)から求めた Meyer 硬度 H_{M} が圧入深さ h に依存してしまう，ひいては計測された Meyer 硬度 H_{M} を用いて各種の力学物性を評価する上で多くの困難を伴う。一方，(3.31)式で示したように円錐圧子の場合，その幾何相似性に起因し，圧入歪は $\varepsilon_{\mathrm{I}} = \tan\beta/2$ により表現できるため，Meyer 硬度 H_{M} は圧入深さに依存しない。ミクロ・ナノ領域における各種の力学物性評価において Vickers 圧子に代表されるピラミッド圧子が多用される主因は円錐圧子同様これらピラミッド圧子が有する幾何相似性に由来している。

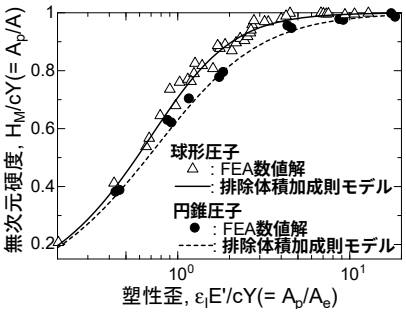


図 5.3 球形圧子および円錐圧子の弾塑性圧子圧入挙動を定量記述する無次元硬度と塑性歪の関係。実線および破線は排除体積加成則モデル（(5.13b)式，(5.14)式）を表し，シンボルは有限要素数値解析(Finite Element Analysis, FEA)結果を示す;

△：球形圧子

●：円錐圧子

歴史的に先行した球形圧子を用いた Brinell 硬度試験が，上述したように，圧入深さ依存性を示すため，この欠点を回避するために Vickers 硬度試験法が開発された。図 5.4 に示すように Brinell 硬度試験との整合性を図るために，その推奨試験条件 $a/R = 0.375$ での球包摂面傾き角度 $\beta = 22.0°$ となるよう正四面ピラミッド形状 Vickers 圧子の面傾き角度は規定されている。一方，Vickers 圧子との整合性を図るため Berkovich 正三面ピラミッド圧子の面傾き角度は圧入に伴う排除体積が Vickers 圧子圧入の排除体積と同等になるよう $\beta = 24.7°$ と規定されている。これらのピラミッド圧子の圧入排除体積と等しい排除体積を有する円錐圧子は「Vickers/Berkovich 等価円錐圧子」と呼ばれ，その面傾き角度は $\beta = 19.7°$ となる。汎用ピラミッド圧子の幾何形状についてのより詳細な記述は第 11.1 節に与えられている

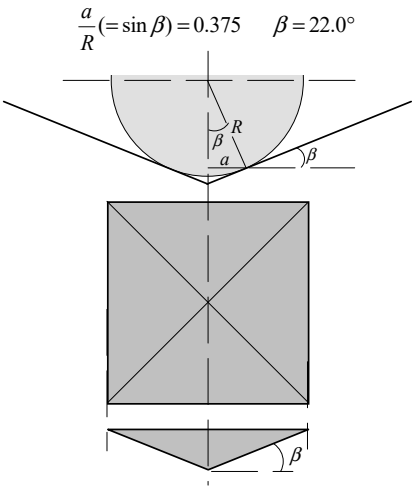


図 5.4 Brinell 圧子との整合性を保つよう規定された Vickers 圧子の幾何形状

前述したように円錐・ピラミッド圧子ではその幾何相似性により Meyer 硬度は圧入深さに依存せず一定値となるため，$P = H_M \cdot A \propto a^2 \propto h^2$ の関係が成立し，圧入荷重 P は圧入深さのべき乗 h^2 に比例して増大することが容易に推測される。図 5.5 に弾性体($PI(=\varepsilon_1 E'/cY)$=0.05)，弾塑性体(PI=1.0)，塑性体(PI=20)，それぞれについて，Vickers/Berkovich 等価円錐圧子の圧入/徐荷時に観察される P - h^2 履歴曲線の有限要素解析(finite element analysis; FEA) 結果を図示する。図中の実線は圧入時の P - h^2 を，破線は最大圧入荷重からの徐荷時における P - h^2 挙動を表している。図に示すように弾性～塑性全ての領域において負荷時の P - h^2 プロットは直線関係にある。図中，$PI(=\varepsilon_1 E'/cY)$=0.05 で示した完全弾性体の場合，負荷直線と徐荷直線は一致している。また，図 5.5 は徐荷曲線も P - h^2 プロットが直線近似で表現できることを示唆している。これら負荷徐荷に伴う P - h^2 直線プロットの勾配から，第 5.2 節で詳述するように，Meyer 硬度，弾性率 E' および降伏応力 Y を実験的に定量評価することが可能となる。

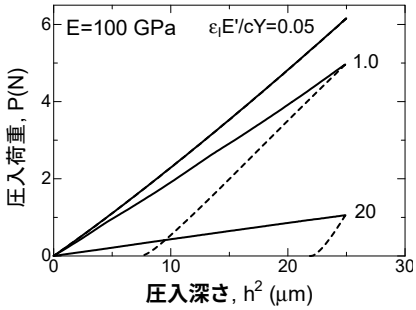


図 5.5 弾塑性体の負荷徐荷に伴う P - h^2 プロット(有限要素解析)

第 3 章で述べたように完全弾性体への圧子圧入の際，圧子周辺

の自由表面は圧子に引き込まれるように沈み込む，いわゆるシンクイン(sink-in；$h_c/h<1$)現象が生じ，球形圧子においては$\eta_c(\equiv h_c/h)=1/2$，円錐圧子では$\eta_c(\equiv h_c/h)=2/\pi$となる(図 3.3，図 3.4，(3.21)式，(3.28)式，および表 3.1 参照)。一方，本節で述べる弾塑性体においては塑性歪 PI $(=\varepsilon_I E'/cY)$の増大に伴い自由表面に向かって生じる塑性流動に起因した「自由表面の盛り上がり」，すなわち，パイルアップが観測されるようになる。Vickers/Berkovich 等価円錐圧子を例に，相対接触深さ h_c/h と塑性歪 $\varepsilon_I E'/cY$ との関係を図 5.6 に，また，等価円錐圧子を $h=5\mu$m まで圧入した際に生じる圧子周辺自由表面の側面形状，ならびに徐荷後の残留圧痕側面形状を，付加した塑性歪をパラメータとして図 5.7 に示す。弾性変形が支配的な $\varepsilon_I E'/cY \le 3$ の領域では，徐荷に伴う垂直方向(z 軸方向)への圧痕の弾性回復が著しく生じていることが分かる。さらに，図 5.6 に示すように，圧入時に観測されるシンクイン/パイルアップの敷居塑性歪(シンクインからパイルアップへと遷移する敷居値)が $\varepsilon_I E'/cY \approx 6$ であるのに対して，圧子徐荷後の残留圧痕で観測される敷居塑性歪は図5.7(左半面図)に示すように $\varepsilon_I E'/cY \approx 3$ と，両敷居値に大きな相違がみられる。この相違は圧子の徐荷時に圧痕表面の垂直方向(z 軸方向)に生じる弾性回復がパイルアップを助長する事実に起因している。

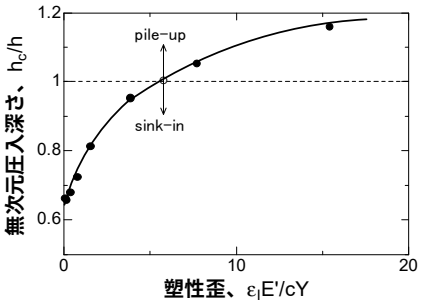


図 5.6 塑性歪の増大と共に圧子周辺自由表面がシンクイン（$h_c/h<1$）からパイルアップ（$h_c/h>1.0$）へと遷移して行く様子を示す（有限要素解析結果）

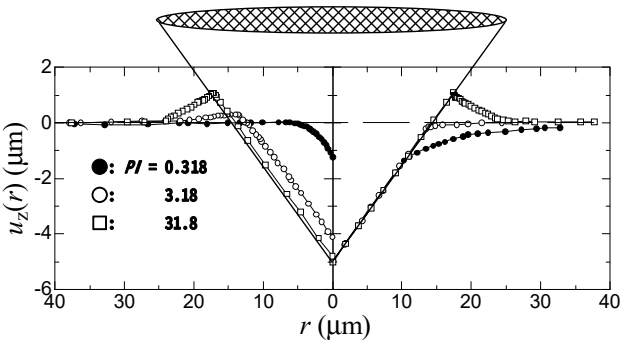


図 5.7 塑性歪（$PI=\varepsilon_I E'/cY$）を異にする弾塑性材料に円錐圧子を $h=5\mu$m まで圧入した際に形成される圧子周辺断面形状（右半面図）および徐荷後に形成された残留圧痕の側断面形状（左半面図）（有限要素解析結果）

5.2　円錐圧子の P - h 負荷徐荷履歴曲線

完全弾性体($PI < 0.2$)に円錐圧子を圧入した際に形成される圧子接触面積が $A_e = \pi(\eta_e \cot\beta)^2 h^2$ により表現出来ることに留意すると，(5.2)式を用い P - h 関係を次式のように記述することができる；

$$P(\equiv \varepsilon_I E' A_e) = k_e h^2 \qquad k_e = (\pi \eta_e^2 \cot^2\beta)\varepsilon_I E' \tag{5.15}$$

ここに η_e は完全弾性体の相対圧子接触深さを意味しており，$\eta_e(=h_c/h) = 2/\pi$ により与えられる。

一方，完全塑性体($PI \geq 20$)の P - h 関係は(5.7)式を用いることにより

$$P(\equiv cYA_p) = k_p h^2 \qquad k_p = (\pi \eta_p^2 \cot^2\beta)cY \tag{5.16}$$

と表現出来る。ここに，η_p は完全塑性体の相対圧子接触深さ h_c/h として定義され，図 5.6 で示すように $\eta_p \approx 1.2$ により与えられる。また，一般的な弾塑性体($0.2 < PI < 20$)の P - h 関係式は(5.1b)式より，Meyer 硬度 H_M を用い次式で記述できる；

$$P(\equiv H_M A) = k_{ep} h^2 \qquad k_{ep} = (\pi \eta_{ep}^2 \cot^2\beta)H_M \tag{5.17}$$

ここに, 添え字の”ep”は elastoplastic(弾塑性)を意味しており, その相対圧子接触深さ η_{ep} は塑性歪 PI に依存して，$2/\pi < \eta_{ep} < 1.2$ の範囲で変化する(図 5.6 参照)。

弾塑性挙動を異にする 3 種類の工業材料の Berkovich 圧子圧入試験で観測された負荷徐荷 P - h 履歴曲線(loading-unloading P - h hysteresis curve)を図 5.8 に例示する。さらに図 5.8 に示した材料の代表例として窒化ケイ素セラミックの $\sqrt{P}$ - h プロットを図 5.9 に示す。図 5.5 での考察および(5.15)式～(5.17)式に見るようにピラミッド・円錐圧子の幾何相似性を反映し，P - h 曲線は負荷および徐荷の両過程ともに $P \propto h^2$ 関係，あるいは，$\sqrt{P} \propto h$ 関係を有している。圧子圧入過程は(5.17)式により，また，圧子徐荷過程での P - h 関係は，徐荷過程の本質が「圧痕の弾性回復現象」にあるという事実に起因して，完全弾性体の P - h 関係((5.15)式)と類似の関係

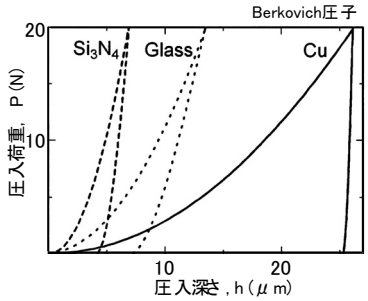


図 5.8 窒化ケイ素セラミック, ソーダ石灰ガラス，および金属銅の Berkovich 圧子圧入・徐荷時に観測される P - h 履歴曲線

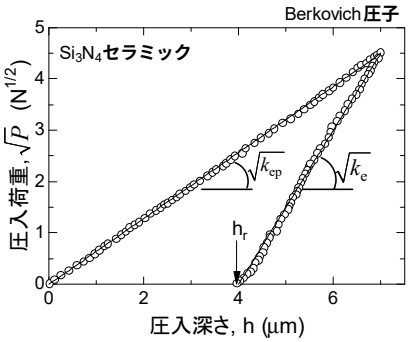


図 5.9 図 5.8 に示した窒化ケイ素セラミックの負荷徐荷 $\sqrt{P}$ - h 直線プロット

式

$$P\left(\equiv \varepsilon_{\mathrm{I}} E' A_{\mathrm{e}}\right) = k_{\mathrm{e}}\left(h - h_{\mathrm{r}}\right)^2$$
$$k_{\mathrm{e}} = \left(\pi \eta_{\mathrm{e}}^2 \cot^2 \beta\right) \varepsilon_{\mathrm{I}} E' \tag{5.18}$$

により記述される。ここに，h_{r}は完全徐荷後の残留圧痕深さを意味している(図 5.9 参照)。完全弾性体の圧子力学応答で見られるように，P-h負荷曲線と徐荷曲線が一致し，両曲線間に履歴現象の見られない場合(例えば図 5.5；PI =0.05)，負荷から徐荷に渡る一連の力学過程で自由エネルギー変化はゼロとなり，負荷の過程で投入された外部仕事(系への投入エネルギー)は徐荷過程での弾性回復に伴い系外に完全に解放される。一方，図 5.5，図 5.8，および，図 5.9 で示したように負荷徐荷の力学過程でそのP-h曲線に履歴現象の観測される場合，これらの履歴曲線が囲む面積は，その力学過程で熱エネルギーとして系外に散逸してしまう塑性散逸エネルギー(plastic energy dissipation)を表している(厳密には，圧子の徐荷後，圧痕周辺に残留する弾性歪エネルギーも含まれる)。圧子の圧入-徐荷の過程において系内外に出入りするエネルギーをP-h履歴曲線に関連付けて図 5.10 に示す。最大荷重$P_{\max}$まで圧子を圧入する際に要する外部仕事U_{T}は

$$U_{\mathrm{T}} = U_{\mathrm{r}} + U_{\mathrm{e}} \tag{5.19}$$

により，塑性散逸エネルギー(履歴曲線が囲む面積；ループエネルギー)U_{r}と弾性歪エネルギーU_{e} の和として与えられる。(5.17)式と(5.18)式の両片に次式で示す積分を施すことによりU_{T}およびU_{e}は，それぞれ，

$$U_{\mathrm{T}} = \int_0^{h_{\max}} P dh = \frac{k_{\mathrm{ep}}}{3} h_{\max}^3 \tag{5.20}$$

$$U_{\mathrm{e}} = \int_{h_{\mathrm{r}}}^{h_{\max}} P dh = \frac{k_{\mathrm{e}}}{3} h_{\max}^3 \left(1 - \xi_{\mathrm{r}}\right)^3 \tag{5.21}$$

により与えられる。ここにξ_{r}は無次元圧痕深さ(relative residual depth)を意味し，$\xi_{\mathrm{r}} = h_{\mathrm{r}} / h_{\max}$ で定義される。したがって塑性散逸エネルギーU_{r}を最終的に次式で表現することが出来る；

$$U_{\mathrm{r}}\left(\equiv U_{\mathrm{T}} - U_{\mathrm{e}}\right) = \xi_{\mathrm{r}} U_{\mathrm{T}} \tag{5.22}$$

(5.22)式の誘導に当たっては負荷曲線と徐荷曲線が座標点($h_{\max}$，$P_{\max}$)において交差する事実，すなわち，$k_{\mathrm{ep}} h_{\max}^2 = k_{\mathrm{e}}\left(h_{\max} - h_{\mathrm{r}}\right)^2$ から導かれる$k_{\mathrm{ep}} / k_{\mathrm{e}} = \left(1 - \xi_{\mathrm{r}}\right)^2$ の関係を利用している。

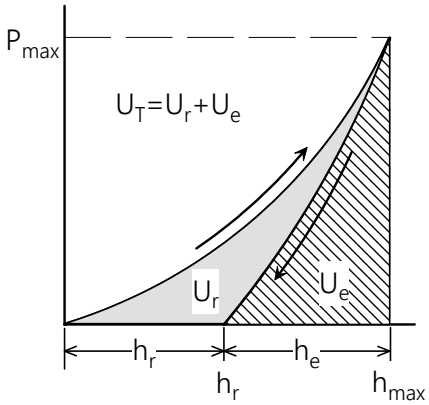


図 5.10 弾塑性体のP-h 履歴曲線に関わるエネルギー線図

(1) 圧入仕事 *WOI* (Work-of-Indentation)

「圧入仕事，*WOI* (work-of- indentation)；単位体積の残留圧痕を形成するに必要な外部仕事」を次式で定義する；

$$WOI = \frac{U_{\mathrm{r}}}{V_{\mathrm{r}}} \tag{5.23}$$

最大圧入深さ $h_{\max}$ において圧子が排除する弾塑性体の体積が $V_{\max} \approx \left(\pi \cot^2 \beta / 3\right) h_{\max}{}^3$ により記述でき，圧子の完全徐荷後に試験体表面に残留する圧痕の体積が $V_{\mathrm{r}} \approx \xi_{\mathrm{r}} V_{\max}$ により近似できることに留意したうえで，(5.17)式，(5.20)式および(5.22)式を(5.23)式に代入することにより，最終的に

$$\begin{aligned} WOI\left(\equiv U_{\mathrm{r}}/V_{\mathrm{r}} \equiv U_{\mathrm{T}}/V_{\max}\right) \\ = H_{\mathrm{M}} \end{aligned} \tag{5.24}$$

を得る。したがって圧入荷重を圧子接触面積で除した値 ($H_{\mathrm{M}} = P/A$)として歴史的に定義されている Meyer 硬度 H_{M} ((5.1b)式)は(5.24)式が意味するように，「単位残留圧痕体積を形成するに要する散逸エネルギ $U_{\mathrm{r}}/V_{\mathrm{r}}$ 」，あるいは「単位排除体積を形成するに要する外部仕事，$U_{\mathrm{T}}/V_{\max}$ 」として再定義することもできる。

有限要素数値解析結果を基に，従来法で求めた Meyer 硬度 H_{M} ($= P/A$) と $WOI\left(= U_{\mathrm{T}}/V_{\max}\right)$ との相関を図 5.11 に示す。定量的な等価相関が両者の間に存在していることが分かる。

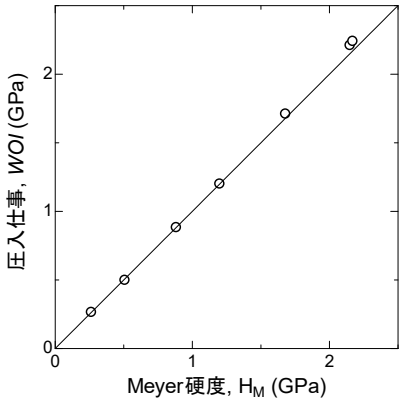


図 5.11 弾性率 $E = 10\,\mathrm{GPa}$，降伏応力 $0.1\mathrm{GPa} \le Y \le 3\mathrm{GPa}$ を有する各種弾塑性体の H_{M} と WOI との相関（有限要素数値解）。実線は $WOI = H_{\mathrm{M}}$ の関係を示す

(2) ループエネルギー U_{r} と降伏応力 cY

散逸エネルギー U_{r} （P-h 履歴曲線が囲む面積；ループエネルギー(loop energy))が注目する弾塑性体の塑性変形に伴い生じる熱散逸であることに着目すると，(5.16)式で示した完全塑性体の P-h 曲線から誘導される塑性散逸エネルギー

$$U_{\mathrm{p}}\left(\equiv \int_0^{h_{\mathrm{p}}} P dh\right) = \frac{k_{\mathrm{p}}}{3} h_{\mathrm{p}}{}^3 \tag{5.25}$$

と前述した弾塑性体のループエネルギー U_{r} の間には等価の関係，すなわち，同一の最大圧入荷重 $P_{\max}$ において，図 5.12 に示すように，$U_{\mathrm{r}} \approx U_{\mathrm{p}}$ および $h_{\mathrm{p}} \approx h_{\mathrm{r}}$ の関係が成立すると考えられる。したがって弾塑性体のループエネルギー U_{r} と圧入荷重 P との間に次式が成立する；

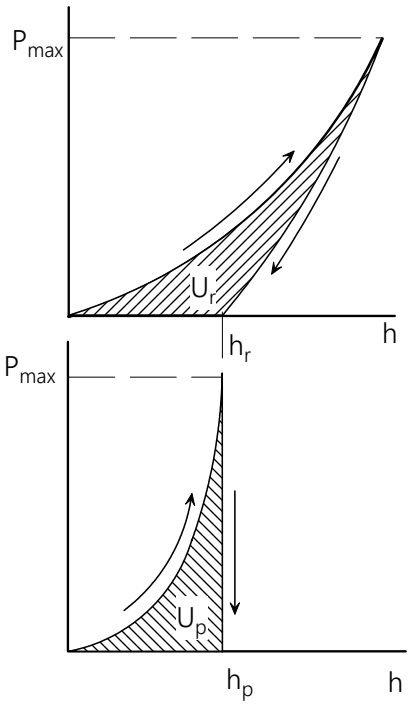


図 5.12 弾塑性体のループエネルギー U_{r} と完全塑性体の塑性散逸エネルギー U_{p}。同一の圧入荷重に対して，$U_{\mathrm{r}} \approx U_{\mathrm{p}}$，$h_{\mathrm{p}} \approx h_{\mathrm{r}}$ の近似関係が存在する

$$U_{\mathrm{r}}\left(\approx U_{\mathrm{p}}\right)=\frac{P^{3/2}}{3\sqrt{k_{\mathrm{p}}}}$$
$$=\frac{\tan\beta}{3\eta_{\mathrm{p}}\sqrt{\pi}}\frac{P^{3/2}}{\sqrt{cY}} \tag{5.26}$$

(5.26)式が示すように，弾塑性体のループエネルギーU_{r}と$P^{3/2}$との間には比例関係(直線関係)が存在し，この直線の勾配は降伏応力cYに帰着される**[5.2]**。換言すると，実測された弾塑性体のループエネルギーU_{r}を圧入荷重$P^{3/2}$に対して直線プロットすることにより, その勾配から降伏応力cYを実験的に定量することができる。Vickers 圧子圧入試験で求めた各種工業材料のU_{r} - $P^{3/2}$直線プロットを図 5.13 に例示する。

[5.2] M. Sakai, *Acta Metall. Mater.*, **41**, 1751 (1993)

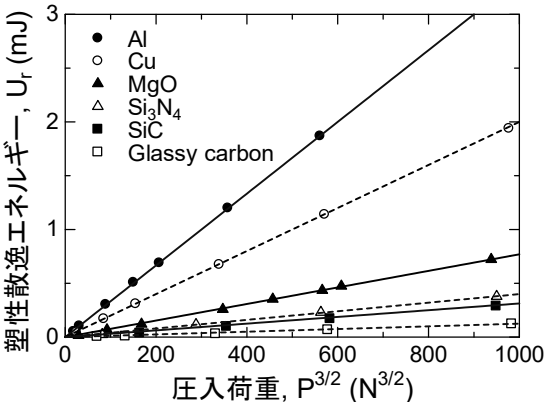


図 5.13 各種工業材料のU_{r} - $P^{3/2}$直線プロット（Vickers 圧子圧入試験）。直線プロットは上から：金属アルミ，金属銅，酸化マグネシウム，窒化ケイ素, 炭化ケイ素, ガラス状カーボン。(5.26)式を適用することにより直線プロットの勾配から降伏応力cYを実験的に求めることができる

6 線形粘弾性理論

6.1 ガラス転移挙動と粘弾性応答

(1) ガラス転移挙動 [6.1, 6.2]

前述の弾性・塑性変形に伴う力学応答は時間や変形速度・刺激速度依存性を示さない。歪や応力の付加に対する力学応答は付加速度に依存することなく，常に瞬時に発現する。さらに，一定の歪あるいは応力を付加した場合, その後に見られる力学応答には, 緩和現象(relaxation phenomena)やクリープ変形(creep deformation)等の時間依存性が見られない。一方，高分子材料に代表される非晶質材料(amorphous materials)の多くは粘弾性体(viscoelastic body)に分類され，その力学応答に時間・変形速度依存性が見られる。

金属に代表される多結晶材料(polycrystalline materials)との比較で，非晶質材料(ガラス材料)の溶融～固化時に観察される体積変化の様子を図 6.1 に定性的に示す。溶融金属材料を始めとした多くの液体は冷却に伴い凝固点(結晶点) T_m で図 6.1 に示すように体積の不連続的な減少を伴って結晶化する。この変化は熱力学的に可逆平衡過程(reversible equilibrium processes)であるため，この結晶体を加熱していくと融点 T_m で不連続的な体積膨張を伴い液体(融液)となる。一方，多くの高分子材料や無機ガラスでは，図 6.1 に示すように，融液を冷却していくと結晶化することなくガラス転移領域を経てガラス状固体となる。結晶材料に見られるような凝固点での不連続体積変化は観測されない。非晶質ガラス材料では，図 6.1 に示すように，液体線と固体線の外挿交点を与える特性温度としてガラス転移温度(glass-transition temperature; glass-transition point) T_g が定義され，あわせて，ガラス転移領域の上限温度 T_U と下限温度 T_L が定義されている。ガラス転移挙動は熱力学的非平衡過程であるため，これらの特性温度 T_g，T_U，T_L は冷却速度や加熱速度に依存する。冷却速度が大きいほどこれらの特性温度は低温側にシフトし，加熱速度の増加と共に高温側にシフトする。

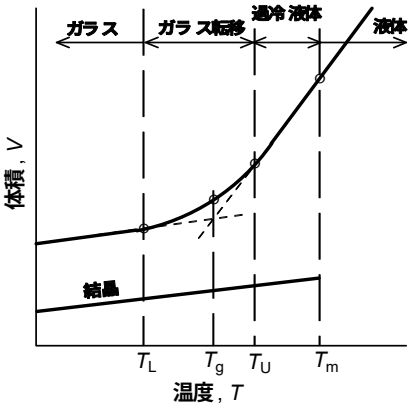


図 6.1 結晶材料および非晶質材料の融解，固化に伴う体積変化と各種特性温度との関係

[6.1] E.J. Donth, “The Glass Transition: Relaxation Dynamics in Liquids and Distorted Materials”, Springer (2001)
[6.2] G.W. Scherer, “Relaxation in Glass and Composites”, John Wiley (1986)

(2) Maxwell 粘弾性液体モデルと Zener 粘弾性固体モデル

上述したようにガラス転移域にある非晶質体は粘弾性挙動を示

し，その力学応答には時間依存・刺激速度依存性が見られる。これらの時間・速度依存粘弾性力学応答を記述する最も単純な現象論的モデルとして図 6.2 に示す Maxwell モデルと Zener モデルが広く知られている。Maxwell モデルは弾性変形を表すフックバネ(Hooke spring)(バネ弾性率 E_{M})とニュートン粘性流動を表すダッシュポット(dashpot)(粘性係数 η)の直列結合からなるモデルであり，粘弾性「液体」(viscoelastic liquid)の力学応答記述に用いられる。一方，粘弾性「固体」(viscoelastic solid)の力学応答を記述する Zener モデルには，図に示すようにモデル I と II があり，モデル I はフックバネ(バネ弾性率 E_{V})とダッシュポット(粘性係数 η)の並列結合からなる Voigt モデルにフックバネ(バネ弾性率 E_{g})を直列結合したモデルである。モデル II は Maxwell モデルとフックバネ(バネ弾性率 E_{e})の並列結合から構成されている**[1.3]**。

フックバネの力学応答は

$$\sigma = E\varepsilon$$

により，ダッシュポットの力学応答は歪速度 $d\varepsilon/dt$ を用いて

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

により記述される。ここに，粘性係数 η (Pa･s)とバネ弾性率 E (Pa)の比,

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

は時間(s)の次元を有し，これら粘弾性モデルの応答速度を記述する際に有用となる特性時間を表している(応力緩和現象では「緩和時間(relaxation time)」，クリープ現象では「遅延時間(retardation time)」と呼ばれる)。

図 6.2 で示した粘弾性液体・固体の力学応答は次式で示す時間に関する一階線形微分方程式を用いて一般表記される；

$$a_0\varepsilon + a_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = b_0\sigma + b_1 \frac{d\sigma}{dt} \tag{6.1}$$

ここに，Maxwell モデルの各係数は

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ b_0 &= 1/\eta \left(= 1/\tau_{\mathrm{M}} E_{\mathrm{M}}\right) \\ b_1 &= 1/E_{\mathrm{M}} \end{aligned} \tag{6.2a}$$

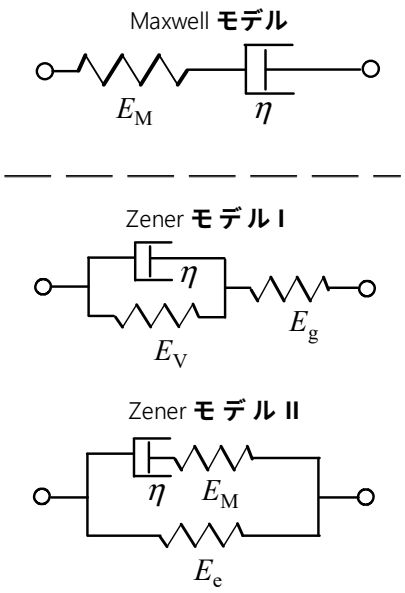


図 6.2 粘弾性液体を記述する Maxwell モデルと，粘弾性固体を表現する Zener モデル

Zener モデル I の係数は

$$
\begin{aligned}
a_0 &= E_{\mathrm{V}}/\eta\left(=1/\tau_{\mathrm{V}}\right) \\
a_1 &= 1 \\
b_0 &= \left(E_{\mathrm{g}}/E_{\mathrm{V}}+1\right)\Big/\tau_{\mathrm{V}}E_{\mathrm{g}} \\
b_1 &= 1\big/E_{\mathrm{g}}
\end{aligned}
\tag{6.2b}
$$

Zener モデル II の係数は

$$
\begin{aligned}
a_0 &= E_{\mathrm{e}}\Big/\left[\tau_{\mathrm{M}}\left(E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{M}}\right)\right] \\
a_1 &= 1 \\
b_0 &= 1\Big/\left[\tau_{\mathrm{M}}\left(E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{M}}\right)\right] \\
b_1 &= 1\big/\left(E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{M}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.2c}
$$

により与えられる。Zener モデル I において $E_{\mathrm{V}}=0$ かつ $E_{\mathrm{g}}=E_{\mathrm{M}}$ を代入することにより，また Zener モデル II において $E_{\mathrm{e}}=0$ を代入することにより，これらの Zener モデルは Maxwell モデルに帰着される。(6.1) 式～(6.2c) 式において E_{g} の添え字 g は glassy modulus(ガラス弾性率あるいは瞬間弾性率)を意味し，E_{e} の添え字 e は equilibrium modulus(平衡弾性率)を意味している。(6.1)式に示した時間 t に関する線形微分方程式の解法には次に示す Laplace 変換の適用が有用となる。

任意関数 $f(t)$ の Laplace 空間における表記を $\bar{f}(p)$ とすると，Laplace 変換は，その変換演算子(オペレーター) $\mathcal{L}$ を用い，次式で定義される；

$$
\mathcal{L}f(t)=\bar{f}(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt
$$

ここに，実空間における変数である時間 t (s)に対応する Laplace 空間における変数 p は時間の逆数次元(1/s)を有する。本書で必要となる Laplace 変換に関わる数学的な概要は Appendix C に与えられている。(6.1)式の両片に Laplace 変換を適用することにより次式を得る；

$$
\bar{\sigma}(p)=E^*(p)\bar{\varepsilon}(p) \tag{6.3a}
$$

上式で $E^*(p)$ は擬弾性率(pseudo elastic modulus)と呼ばれ，

$$
E^*(p)=\frac{a_0+a_1p}{b_0+b_1p} \tag{6.4}
$$

により表現される。例えば，粘弾性液体を表現する Maxwell モデ

ルの擬弾性率 $E^*(p)$ は，(6.4)式に(6.2a)式を代入することにより

$$E^*(p) = p \cdot \frac{E_{\mathrm{M}}}{p + \dfrac{1}{\tau_{\mathrm{M}}}} \tag{6.5a}$$

で記述できる。同様に，(6.4)式に(6.2b)式あるいは(6.2c)式を代入することにより粘弾性固体を表現する Zener モデル I の擬弾性率は

$$E^*(p) = E_{\mathrm{g}} \left(\frac{1}{\tau_{\mathrm{V}}} \frac{1}{p + \dfrac{1}{\tau_{\mathrm{Z}}}} + \frac{p}{p + \dfrac{1}{\tau_{\mathrm{Z}}}} \right) \tag{6.5b}$$

$$\tau_{\mathrm{Z}} = \left(E_{\mathrm{e}} / E_{\mathrm{g}} \right) \tau_{\mathrm{V}} ; \quad 1/E_{\mathrm{e}} = 1/E_{\mathrm{g}} + 1/E_{\mathrm{V}}$$

Zener モデル II の擬弾性率は

$$E^*(p) = E_{\mathrm{g}} \left(\frac{E_{\mathrm{e}}/E_{\mathrm{g}}}{\tau_{\mathrm{M}}} \frac{1}{p + \dfrac{1}{\tau_{\mathrm{M}}}} + \frac{p}{p + \dfrac{1}{\tau_{\mathrm{M}}}} \right) \tag{6.5c}$$

$$E_{\mathrm{g}} = E_{\mathrm{e}} + E_{\mathrm{M}}$$

により与えられる。Zener モデル I((6.5b)式)と Zener モデル II((6.5c)式)を比較すると，個々のモデルを反映して，擬弾性率を記述している各係数には相違がみられるものの数学的表記は両者共に同一である。事実，Zener モデル II に $E_{\mathrm{e}}/E_{\mathrm{g}} = \tau_{\mathrm{M}}/\tau_{\mathrm{V}}$ ， $\tau_{\mathrm{M}} = \tau_{\mathrm{Z}}$ の関係を適用すると，両モデルは全く同一の粘弾性挙動を示す。

一方，(6.3a)式の随伴関係式として与えられる

$$\bar{\varepsilon}(p) = C^*(p)\bar{\sigma}(p) \tag{6.3b}$$

において，$C^*(p)$ は擬コンプライアンス(pseudo compliance)と呼ばれ，擬弾性率 $E^*(p)$ との間に逆数関係，$C^*(p) = 1/E^*(p)$ ，が存在する。(6.3a)式および(6.3b)式で示したように Laplace 空間における線形粘弾性体構成方程式の表記，$\bar{\sigma}(p) = E^*(p)\bar{\varepsilon}(p)$ および $\bar{\varepsilon}(p) = C^*(p)\bar{\sigma}(p)$ が実空間における完全弾性体構成方程式の表記，$\sigma = E\varepsilon$ および $\varepsilon = C\sigma$ と形式的に同等となる。さらに，Laplace 空間における擬弾性率間に存在する逆数関係，$C^*(p) = 1/E^*(p)$ が実空間における弾性係数間の逆数関係($C = 1/E$)にも一対一で対応している。このように，実空間と Laplace 空間との間に存在する，一対一の対応は「**弾性-粘弾性対応原理(Elastic-Viscoelastic**

Correspondence Principle)」と呼ばれ**[1.2, 1.3]**，第 7 章で詳述する粘弾性圧子力学理論構築の基礎を与える。

上述したモデル粘弾性体の具体的な力学応答を理解するため，Maxwell モデル(粘弾性液体)と Zener II(粘弾性個体)を例にとり，これらのモデルの(i)ステップ状歪付加で観察される応力緩和挙動および，(ii)ステップ状荷重付加に対するクリープ変形を次に考察する。

(i) *ステップ状歪付加で観察される応力緩和挙動*

ステップ状の一定歪 ε_0 付加は単位ステップ関数 $u(t)$ を用いることにより次式で表現される；

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0 u(t); \quad u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases} \tag{6.6}$$

(6.6)式の Laplace 変換から得られる $\bar{\varepsilon}(p)=\varepsilon_0/p$ の関係(Appendix C 参照)を(6.3a)式に代入することにより，ステップ歪付加に対する Laplace 空間における粘弾性体構成方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(p)&=\left[E^*(p)/p\right]\varepsilon_0\\ &=\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)\cdot\varepsilon_0\end{aligned} \tag{6.7}$$

ここに，$\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)$ は緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)\left[\equiv\sigma(t)/\varepsilon_0\right]$ の Laplace 空間における表記であり，擬弾性率 $E^*(p)$ との間に $\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)=E^*(p)/p$ の関係が存在する。以上の結果を(6.5a)式(Maxwell モデル)および(6.5c)式(Zener II モデル)に適用して得られる $\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)$ に Laplace 逆変換(Appendix C 参照)を施すことにより，最終的に，それぞれ次式で示す実空間における緩和弾性率を得る；

【Maxwell 粘弾性液体】

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=E_{\mathrm{relax}}(t)=E_{\mathrm{M}}\exp\left(\frac{-t}{\tau_{\mathrm{M}}}\right) \tag{6.8a}$$
$$E_{\mathrm{g}}=E_{\mathrm{M}}$$

【Zener II 粘弾性固体】

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=E_{\mathrm{relax}}(t)=E_{\mathrm{e}}+\left(E_{\mathrm{g}}-E_{\mathrm{e}}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau_{\mathrm{M}}}\right) \tag{6.8b}$$
$$E_{\mathrm{g}}=E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{M}}$$

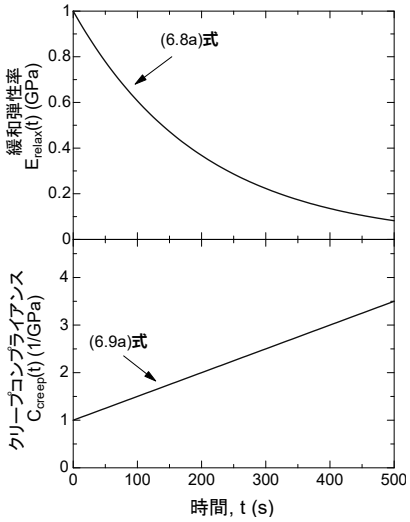


図 6.3 Maxwell モデルの緩和弾性率とクリープ関数：
$E_{\mathrm{M}}\left(\equiv E_{\mathrm{g}}\right)=1$ GPa,
$\tau_{\mathrm{M}}=200$ s,
$\eta\left(\equiv\tau_{\mathrm{M}}\cdot E_{\mathrm{M}}\right)=200$ GPa・s

(ii) *ステップ状応力付加により観測されるクリープ挙動*

ステップ状一定応力σ_0の付加は，上記(i)項で示したと同様に単位ステップ関数$u(t)$を用いることにより，$\sigma(t)=\sigma_0 u(t)$で記述できる。その Laplace 変換である$\bar{\sigma}(p)=\sigma_0/p$を(6.3b)式に代入し，さらに，$C_{\mathrm{creep}}(t)=\varepsilon(t)/\sigma_0$により定義されるクリープ関数$C_{\mathrm{creep}}(t)$の Laplace 変換$\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p)\left(\equiv\bar{\varepsilon}(p)/\sigma_0\right)$と擬コンプライアンス$C^*(p)$との間に$C^*(p)\left[\equiv 1/E^*(p)\right]=p\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p)$の関係が存在することに留意の上で，(6.5)式を利用し，Maxwell モデルおよび Zener II モデル，それぞれの$\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p)$を求める。これらの結果に対する Laplace 逆変換操作(Appendix C 参照)により最終的に次式で示す実空間におけるクリープ関数を得る；

【Maxwell 粘弾性液体】

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}=C_{\mathrm{creep}}(t)=\frac{1}{E_{\mathrm{M}}}+\frac{t}{\eta} \tag{6.9a}$$

【Zener II 粘弾性固体】

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}&=C_{\mathrm{creep}}(t)\\&=\frac{1}{E_{\mathrm{g}}}+\left(\frac{1}{E_{\mathrm{e}}}-\frac{1}{E_{\mathrm{g}}}\right)\left[1-\exp\left(\frac{-t}{\tau_{\mathrm{Z}}}\right)\right]\\&E_{\mathrm{g}}=E_{\mathrm{e}}+E_{\mathrm{M}}\\&\tau_{\mathrm{Z}}=\left(1+E_{\mathrm{M}}/E_{\mathrm{e}}\right)\tau_{\mathrm{M}}\end{aligned} \tag{6.9b}$$

(6.8b)式と(6.9b)式に示した Zener 粘弾性固体の応力緩和挙動を記述する緩和時間τ_{M}とクリープ変形挙動を記述する遅延時間τ_{Z}との間には，常に，$\tau_{\mathrm{Z}}\left[\equiv\left(1+E_{\mathrm{M}}/E_{\mathrm{e}}\right)\tau_{\mathrm{M}}\right]>\tau_{\mathrm{M}}$の関係が成立する。この事実はクリープ応答が同一粘弾性固体の緩和応答よりも常に緩慢に進行することを意味している(図 6.4 参照)。

上述した Maxwell 粘弾性液体と Zener 粘弾性固体の応力緩和とクリープ変形に見られる特徴的な相違を図 6.3 および図 6.4 にグラフ化して示す。粘弾性「液体」は時間の経過と共に完全緩和($E_{\mathrm{relax}}(t)\downarrow 0$)を示すのに対し，粘弾性「固体」の緩和弾性率は時間の経過と共に平衡弾性率へと緩和収束する($E_{\mathrm{relax}}(t)\downarrow E_{\mathrm{e}}$)。

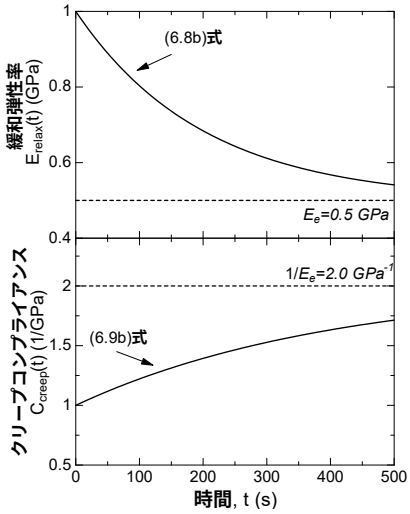


図 6.4 Zener モデルの緩和弾性率とクリープ関数：

$E_{\mathrm{M}}=0.5\,\mathrm{GPa},\quad E_{\mathrm{e}}=0.5\,\mathrm{GPa},$

$E_{\mathrm{g}}\left(=E_{\mathrm{M}}+E_{\mathrm{e}}\right)=1.0\,\mathrm{GPa}$

$\tau_{\mathrm{M}}=200\,\mathrm{s},$

$\tau_{\mathrm{Z}}\left(\equiv E_{\mathrm{g}}\tau_{\mathrm{M}}/E_{\mathrm{e}}\right)=400\mathrm{s}$

6.2　微分型粘弾性構成式　-Wiechert モデル-

高分子材料を始めとする多くの粘弾性体の複雑な力学応答を上述した単一の特性時間 (緩和時間，遅延時間) τ で記述することは不可能であり，複数の異なる特性時間あるいは特性時間分布(緩和時間・遅延時間スペクトル)を考慮する必要がある。第 6.1 節の単純粘弾性モデルを拡張・一般化した Wiechert モデルを図 6.5 に示す**[1.2, 1.3]**。Wiechert モデルは Zener II モデルの拡張系と考えることができ，各種の異なる緩和時間 $\tau_i\left(\equiv\eta_i/E_i\right)$ を有する複数の Maxwell モデルと平衡弾性率 E_e を有するフックバネとの並列結合から構成されている。モデルに付加される全応力 $\sigma(t)$ は平衡バネおよび各 Maxwell 要素に作用する応力，σ_e および σ_i，の和として次式により表現出来る；

$$\sigma(t)=\sigma_\mathrm{e}(t)+\sum_i\sigma_i(t) \tag{6.10}$$

全ての要素は並列結合により構成されているため，モデルの歪 $\varepsilon(t)$ は個々の要素に生じている歪 ε_i と等しくなる事実より次式を得る；

$$\begin{aligned}&\sigma_\mathrm{e}(t)=E_\mathrm{e}\varepsilon(t)\\&\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\frac{1}{k_i}\frac{d\sigma_i(t)}{dt}+\frac{\sigma_i(t)}{\eta_i}\end{aligned} \tag{6.11}$$

(6.10)式および(6.11)式に Laplace 変換を施すことにより，(6.3a)式を得る。ここに，Wiechert モデルの擬弾性率 $E^*(p)$ は次式で与えられる；

$$\begin{aligned}E^*(p)&=p\bar{E}_\mathrm{relax}(p)\\&=p\left(\frac{E_\mathrm{e}}{p}+\sum_i\frac{E_i}{p+\dfrac{1}{\tau_i}}\right)\end{aligned} \tag{6.12}$$

したがって，Laplace 空間における緩和弾性率

$$\bar{E}_\mathrm{relax}(p)=\frac{E_\mathrm{e}}{p}+\sum_i\frac{E_i}{p+\dfrac{1}{\tau_i}}$$

を逆変換することにより，緩和弾性率 $E_\mathrm{relax}(t)$ は(6.8a)式，(6.8b)式のより一般的な表現として

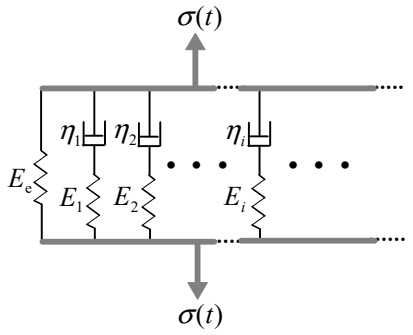


図 6.5　異なる緩和時間 $\tau_i\left(\equiv\eta_i/k_i\right)(i=1,2,3\cdots)$ を有する複数の Maxwell モデルと平衡弾性率 E_e を有するフックバネとの並列結合から構成されている Wiechert 粘弾性モデル。粘弾性液体は，このモデルにおいて，平衡弾性率 E_e をゼロとおくことにより表現される

$$E_{\mathrm{relax}}(t) = E_{\mathrm{e}} + \sum_i E_i \exp\left(\frac{-t}{\tau_i}\right) \tag{6.13}$$

によって与えられる。ここに，E_{e}は粘弾性固体の平衡弾性率を表しており，粘弾性液体の場合は(6.13)式において$E_{\mathrm{e}} = 0$となる。

以上で展開した粘弾性構成式は，(6.1)式および(6.11)式で示した線形微分方程式に基礎を置いているため，「**微分型粘弾性構成方程式(differential viscoelastic constitutive equation)**」と総称される。

上述したように一般的な線形粘弾性構成方程式の Laplace 空間表記は次式で与えられた；

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(p) &= p\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)\bar{\varepsilon}(p) \\ &= E^*(p)\cdot\bar{\varepsilon}(p)\end{aligned} \tag{6.14}$$

(6.14)式に Laplace 逆変換を適用することにより実空間での汎用粘弾性構成方程式の表記として次式を得る(Appendix C 参照)；

$$\sigma(t) = \int_0^t E_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}dt' \tag{6.15}$$

(6.15) 式の導出に当たっては $\mathcal{L}\left[d\varepsilon(t)/dt\right] = p\bar{\varepsilon}(p) - \varepsilon(0^-)$，$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-t')g(t')dt'\right] = \bar{f}(p)\bar{g}(p)$ の関係，および $\varepsilon(0^-) = 0$，すなわち，$t' < 0$ で $\varepsilon(t') = 0$ となる初期条件を仮定している(これは時間 $t' < 0$ で与えられる過去の時間領域では系に付加される外部ひずみが存在しないことを意味している)。$E_{\mathrm{relax}}(t)$ に着目した上述の操作をクリープ関数 $C_{\mathrm{creep}}(t)$ に関しても同様に行うことができ，

$$\varepsilon(t) = \int_0^t C_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{d\sigma(t')}{dt'}dt' \tag{6.16}$$

を得る。(6.16)式の Laplace 変換，

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}(p) &= p\cdot\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p)\bar{\sigma}(p) \\ &= C^*(p)\bar{\sigma}(p)\end{aligned} \tag{6.17}$$

を(6.14)式に代入することにより，第 6.1 節で示した単純モデルと同様に，緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ とクリープ関数 $C_{\mathrm{creep}}(t)$ との間には Laplace 空間において

$$\begin{aligned}&p^2\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p) = \\ &\quad = E^*_{\mathrm{relax}}(p)\cdot C^*_{\mathrm{creep}}(p) = 1\end{aligned} \tag{6.18}$$

の関係が成立する。したがって(6.18)式の Laplace 逆変換として実空間では

$$\int_0^t E_{\mathrm{relax}}(t-t')C_{\mathrm{creep}}(t')dt' = t \tag{6.19}$$

の関係が存在する。(6.15)式および(6.16)式は上述の微分型粘弾性構成方程式との対比で「**積分型粘弾性構成方程式(integral viscoelastic constitutive equation)**」と呼ばれている。これらの微分型および積分型構成方程式は以上の理論考察から明らかなように，力学的には，その本質において等価である。しかし，積分型構成式は微分型構成方程式とは異なり，ニュートン粘性を表すダッシュポットやフック弾性を表すスプリング等のモデルに依存しない普遍的な汎用粘弾性関数，$E_{\mathrm{relax}}(t)$ および $C_{\mathrm{creep}}(t)$，を用い記述されているため，その適用範囲は広い。

6.3　積分型粘弾性構成式 -Boltzmann 重畳積分-

前述したように弾性体は外部刺激に対して瞬時に応答する。換言すると，この刺激を取り去ると瞬時に元の状態に戻る。これに対し粘弾性体は応力緩和やクリープ現象に見られるように過去の力学応答(過去の応力や歪の履歴)が観測を行っている現時点での応力や歪状態に影響をおよぼす。このように，現時点での力学応答に過去の記憶が残留しているため，粘弾性体は「記憶物質」とも称され緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ やクリープ関数 $C_{\mathrm{creep}}(t)$ 等の特性関数は，しばしば，記憶関数とも呼ばれる。線形刺激応答理論において過去の履歴を定量記述する際に，その基礎をなすのが Boltzmann の重畳原理(Boltzmann's convolution principle)である**[1.2, 1.3]**。

過去のある時間 t' での刺激として歪 $\varepsilon(t')$ を，これに対する線形応答として応力 $\sigma(t')$ を考える。$t_1 < t_2 < t$ とし，過去の時間 $t' = t_1$ および $t' = t_2$ で系に加えた一定歪，それぞれ，$\varepsilon(t_1)$，$\varepsilon(t_2)$，に対する力学応答(応力発現)を，それぞれ，$\sigma(t_1)$，$\sigma(t_2)$ とする。この積算歪 $\varepsilon(t) = \varepsilon(t_1) + \varepsilon(t_2)$ に対する観測時点 $t' = t$ で観測される応力 $\sigma(t)$ は個々の応力の和

$$\sigma(t) = \sigma(t - t_1) + \sigma(t - t_2)$$

すなわち，「過去における個々の応力の積算として現時点での応力を記述することができる」とするのが Boltzmann の重畳原理の意味するところである。より一般的な歪履歴に対する Boltzmann の重畳原理を図 6.6 に示す。図に示すように過去時間 t_i において系に付加されるステップ歪を $\Delta\varepsilon(t_i)$ とすると，系を観測している現時間 t での応力は，記憶関数(memory function)として応力緩和弾性

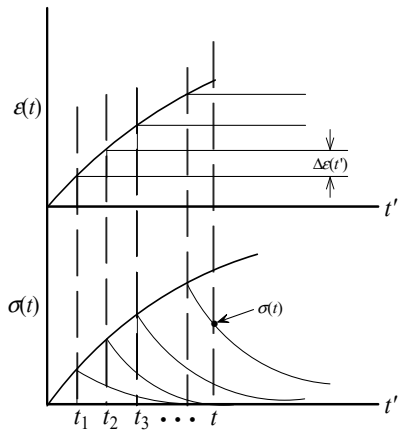


図 6.6　Boltzmann 重畳原理。過去の時間 $t' = t_i$ におけるステップ状歪 $\Delta\varepsilon(t_i)$ により誘起された応力 $\sigma(t_i)$ の線形重畳則により現在時間 t における応力 $\sigma(t)$ が規定される

率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ を用い，重畳原理に従って次式で表される；

$$\sigma(t)=\sum_i E_{\mathrm{relax}}\left(t-t_i\right)\Delta\varepsilon(t_i) \tag{6.20}$$

上式で，各時間におけるステップ歪 $\Delta\varepsilon(t_i)$ を微小時間間隔 dt' での歪変化， $\Delta\varepsilon(t_i)=\left[d\varepsilon(t')/dt'\right]dt'$ に置き換えることにより先に導出した積分表記(6.15)式を得る。同様に，付加応力 $\Delta\sigma(t_i)$ に対する力学応答を歪 $\varepsilon(t)$ とすると, Boltzmann 重畳原理から記憶関数としてクリープ関数 $C_{\mathrm{creep}}(t)$ を用いた(6.16)式が得られる。

今までに展開してきた線形粘弾性構成方程式論の定式化において導入された擬弾性率 $E^*(p)$ および擬コンプライアンス $C^*(p)$ ；

$$\begin{aligned} E^*(p)&=p\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)\\ C^*(p)&=p\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p)\end{aligned} \tag{6.21}$$

は，それぞれ，応力緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ およびクリープ関数 $C_{\mathrm{creep}}(t)$ の Carson 変換とも呼ばれる Laplace 変換の一種であり，その一般的な定義は時間 t の任意関数 $f(t)$ に対して次式で与えられる；

$$f^*(p)=p\bar{f}(p)=p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{6.22}$$

緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ およびクリープ関数 $C_{\mathrm{creep}}(t)$ の Carson 変換，$E^*(p)$ と $C^*(p)$，を用いると両者の間に完全弾性体で成り立つ関係式，例えば $E^*(p)\cdot C^*(p)=1$ の関係が成立することは既に述べた((6.18)式参照)。換言すると，Laplace 変換 $\bar{E}_{\mathrm{relax}}(p)$， $\bar{C}_{\mathrm{creep}}(p)$ に代わりに Carson 変換 $E^*(p)$， $C^*(p)$ を用い，これに弾性-粘弾性対応原理を適用することにより，次節でその一例を示すように，完全弾性体の理論体系を時間・刺激速度依存性を有する粘弾性応答に適用することが可能となる。

6.4 粘弾性応答におけるポアソン比の時間依存性

粘弾性域ではポアソン比νも時間依存性を示し，このことが実測データの定量解析を複雑にしてしまう**[1.3]**。この問題を回避するために高分子レオロジーを始め多くの粘弾性計測に関わる分野においては，体積変形を伴わない，換言すると，ポアソン効果を考慮する必要の無い単純せん断試験法が広く用いられ，ずり緩和弾性率$G_{\mathrm{relax}}(t)$やずりクリープ関数$J_{\mathrm{creep}}(t)$の計測定量が広く採用されている。しかし，本書の中核をなす圧子力学で広く用いられている圧子の圧入･徐荷試験では不可避的に体積変形が誘起され，ポアソン比の時間依存性，すなわち時間の関数としての粘弾性ポアソン比$\nu(t)$が粘弾性圧子力学解析において$E_{\mathrm{relax}}(t)$や$C_{\mathrm{creep}}(t)$に著しい影響を与える。上述した Carson 変換の「弾性-粘弾性対応原理」への適応例として，以下，各種粘弾性関数に及ぼす体積変化・時間依存ポアソン比の影響について考察する。

完全弾性体のヤング率E，ずり弾性率G，体積弾性率(bulk modulus) K，およびポアソン比νとの間には次式の関係が成立する**[1.2]**；

$$\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} = \frac{3-2\kappa G}{6+2\kappa G} \tag{6.23a}$$

$$E = 2(1+\nu)G \tag{6.24a}$$

$$E'\left(\equiv \frac{E}{1-\nu^2}\right) = \frac{2G}{1-\nu} \tag{6.25a}$$

上式でκは体積コンプライアンスと呼ばれ$\kappa = 1/K$により定義される。体積弾性率Kは，体積Vの完全弾性体に静水圧pを付加した際に生じる体積変化ΔVを用い$p = K(\Delta V/V)$により定義される。体積変化の無い非圧縮性弾性体では$\kappa = 0$となるため，上式より$\nu = 1/2$，$E = 3G$，並びに$E' = 4G$の良く知られた関係が成り立つ。一方，これらの弾性率に時間依存性の存在する粘弾性体においては，「弾性-粘弾性対応原理」に基づき，完全弾性体で成り立つ(6.23a)式～(6.25a)式に Carson 変換を適用することにより

$$\nu^* = \frac{3K^*-2G^*}{6K^*+2G^*} = \frac{3-2\kappa^* G^*}{6+2\kappa^* G^*} \tag{6.23b}$$

$$E^* = 2(1+\nu^*)G^* \tag{6.24b}$$

$$E'^*\left(\equiv \frac{E^*}{1-\nu^{*2}}\right) = \frac{2G^*}{1-\nu^*} \tag{6.25b}$$

の関係が得られる。さらに考察を進めるに当たって，単一緩和時間τ_0を有し，かつ (6.8b)式をずり緩和弾性率を用いて表現した次式で示すモデル粘弾性固体を想定する；

$$G(t) = G_{\mathrm{e}} + \left(G_{\mathrm{g}} - G_{\mathrm{e}}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \tag{6.26}$$

ここに$G_{\mathrm{g}}\left(=G(0)\right)$は瞬間弾性率(初期弾性率あるいはガラス弾性率)，$G_{\mathrm{e}}\left(=G(\infty)\right)$は平衡弾性率であり，粘弾性「液体」(Maxwell モデル)は$G_{\mathrm{e}}=0$で表現される。体積コンプライアンス$\kappa(t)$の時間依存性が他の粘弾性関数の時間依存性に比して無視できる程度に小さいため**[1.3]**，以降の演算過程を簡潔にする目的で$\kappa(t)=\kappa_0$ (定数)と仮定する。さらに，(6.26)式の Carson 変換G^*を(6.23b)式～(6.25b)式に代入することにより得られたν^*，E^*，およびE'^*，それぞれに対し，Laplace 逆変換を施すことにより，最終的に，これらの粘弾性関数の実空間における表現式として次式を得る；

$$\begin{aligned}\frac{E(t)}{2\left(1+\nu_{\mathrm{g}}\right)G_{\mathrm{g}}} &= \left(1-\frac{3R}{2\left(1+\nu_{\mathrm{g}}\right)\left(1+\gamma R\right)}\right)\exp\left(-\,{}^{t}\!/_{\tau_1}\right) \\ &\quad + \frac{3R}{2\left(1+\nu_{\mathrm{g}}\right)\left(1+\gamma R\right)}\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1-2\nu_{\mathrm{g}}}{2}\right)\left[\frac{E(t)}{2\left(1+\nu_{\mathrm{g}}\right)G_{\mathrm{g}}}\right] \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{E'(t)}{2G_{\mathrm{g}}/1-\nu_{\mathrm{g}}} &= 2\left(1-\nu_{\mathrm{g}}\right)\frac{1+\gamma R}{1+4\gamma R}R \\ &\quad + \frac{\left(1-\nu_{\mathrm{g}}\right)}{2}\left(1-R\right)\exp\left(-t/\tau_0\right) \\ &\quad + \frac{\left(1+\nu_{\mathrm{g}}\right)}{2}\frac{1-R}{1+4\gamma R}\exp\left(-t/\tau_2\right)\end{aligned} \tag{6.29}$$

上式において，τ_1およびτ_2は，それぞれ，次式により，ずり緩和時間τ_0に関係付けられる特性緩和時間である；

$$\tau_1 = \frac{3}{2\left(1+\nu_{\mathrm{g}}\right)}\frac{1}{1+\gamma R}\tau_0 \tag{6.30}$$

$$\tau_2 = \frac{1+4\gamma}{1+4\gamma R}\tau_0 \tag{6.31}$$

また，ν_{g}は$\nu_{\mathrm{g}}=\nu(0)$で定義される瞬間ポアソン比(初期ガラス状

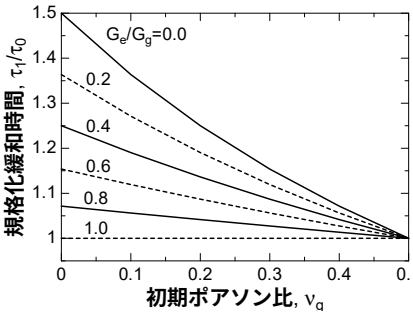


図 6.7 $E(t)$および$\nu(t)$の時間依存性を規定する特性緩和時間τ_1((6.30)式)。常に$\tau_1 \geq \tau_0$の関係が存在する

態ポアソン比)を意味し，R および γ は，それぞれ，$R = G_e/G_g$，$\gamma = (1-2\nu_g)/2(1+\nu_g)$ により定義される。先に言及したように粘弾性「液体」($G_e = 0$)では $R = 0$ となる。τ_1 は $E(t)$ の緩和挙動((6.27)式)ならびに $\nu(t)$ の時間依存性((6.28)式)を記述する特性時間であり，図 6.7 に示すように，常に $\tau_1 \geq \tau_0$ の関係が存在する。換言すると，$E(t)$ の緩和挙動は常に $G(t)$ の緩和挙動より緩慢となることを意味している。一方，$E'(t)$ の緩和挙動((6.29)式)は二つの特性時間 τ_0 と τ_2 により規定され，且つ，$\tau_2 \geq \tau_0$ の関係が存在する（図 6.8 に示すように $\nu_g = 1/2$ で与えられる非圧縮性粘弾性体においては $\tau_1 = \tau_0 = \tau_2$ の関係が成立する）。$G(t)$ の緩和挙動との比較で $E(t)$ および $E'(t)$ の緩和挙動の例を図 6.9 に示しておく。(6.28)式が示すように，粘弾性ポアソン比 $\nu(t)$ の時間依存性は $E(t)$ の緩和に伴い発現することが分かる。G_e/G_g の値を異にする各種粘弾性体を例に，$\nu(t)$ に見られる時間依存粘弾性挙動を図 6.10 に示す($\nu_g = 0.1$，$\tau_0 = 200$ s)。$E(t)$ に起因する系の応力緩和と共に $\nu(t)$ は単調に増大する。図に示すように，粘弾性液体($G_e/G_g = 0$)の場合，完全緩和に至る長時間側局限でポアソン比は $\nu(t) \to 1/2$ へと収束し非圧縮性完全流体として挙動する。

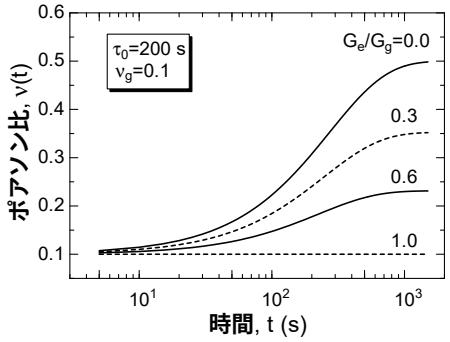


図 6.10 粘弾性ポアソン比 $\nu(t)$ ((6.28)式)の時間依存性

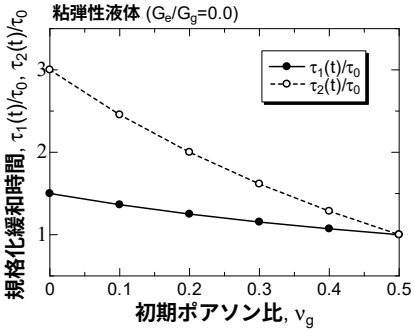


図 6.8 特性緩和時間 τ_1 および τ_2 に及ぼす初期ポアソン比 ν_g の影響((6.30)式，(6.31)式)

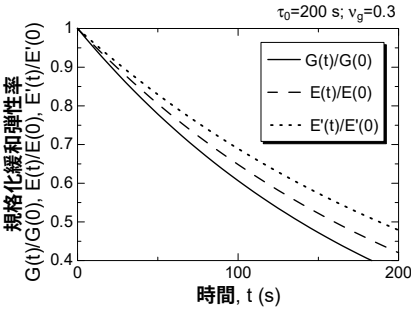


図 6.9 $G(t)$，$E(t)$ および $E'(t)$ の緩和挙動に見られる差異。特性緩和時間が $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ の関係にあることを反映して，$E(t)$ ((6.27)式), そして, さらには $E'(t)$ ((6.29)式)の緩和挙動は，$G(t)$ ((6.26)式)の緩和に比べて緩慢となる

7 粘弾性圧子力学

7.1 弾性 - 粘弾性対応原理を用いた粘弾性圧子力学の定式化

線形粘弾性体構成方程式の Laplace 空間における表記が実空間における完全弾性体の構成方程式と形式的に等価となる事実((6.3a), (6.3b), (6.14), (6.17)式参照), すなわち, 前述した「弾性-粘弾性対応原理」を用いることにより第 3 章で展開した弾性圧子力学理論を粘弾性圧子力学理論へと拡張することができる**[7.1-7.5]**。計装化顕微インデンターで実測可能な圧入荷重 P と圧子接触面積 $A(=\pi a^2)$ の関係を記述した汎用構成方程式(第 3 章(3.32)式)を書き換えた次式

$$P=\left(E'\varepsilon_{\mathrm{I}}\right)A \tag{3.32'}$$

に「弾性-粘弾性対応原理」を適用することにより線形粘弾性圧子力学の汎用構成式として次式を得る；

$$\begin{aligned} P(t)&=\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{d\left[\varepsilon_{\mathrm{I}}(t')\cdot A(t')\right]}{dt'}dt' \\ \varepsilon_{\mathrm{I}}(t)\cdot A(t)&=\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{d\left[P(t')\right]}{dt'}dt' \end{aligned} \tag{7.1}$$

上式において緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ は第 3 章で定義した平面歪ヤング率 $E'=E/(1-\nu^2)$ の粘弾性表記である。さらに, 粘弾性領域ではポアソン比 ν も時間に依存することに留意すると緩和弾性率は $E'_{\mathrm{relax}}(t)=E_{\mathrm{relax}}(t)/\left[1-\nu^2(t)\right]$ により定義されクリープ関数 $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ との間には(6.19)式と同様の関係,

$$\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')C'_{\mathrm{creep}}(t')dt'=t \tag{7.2}$$

が存在する。

(3.29)式～(3.31)式から容易に推察できるように平端円柱圧子や球形圧子の場合, 粘弾性体の圧子圧入歪 $\varepsilon_{\mathrm{I}}(t)$ が時間依存性を示すことに留意する必要がある。表 7.1 に, それぞれ形状を異にする軸対称圧子の圧入過程における積分型粘弾性構成方程式をまとめて示す。表から分かるように, 幾何相似性(geometrical similarity)を特徴とする円錐圧子や汎用の Vickers・Berkovich ピラミッド圧子の圧入歪 ε_{I} は圧子面傾き角度 β のみに依存し, 圧子圧入量等の外部

[7.1] J.R.M. Radock, *Q. Appl. Math.*, **15**, 198 (1957)
[7.2] S.C. Hunter, *J. Mech. Phys. Solids,* **8**, 219 (1960)
[7.3] M. Sakai, *Phil. Mag, A*, **82[10]**, 1841 (2002)
[7.4] M. Sakai, S. Shimizu, *J. Non-Crystal. Solids,* **282**, 236 (2001)
[7.5] 逆井基次, *日本レオロジー学会誌,* **39(1・2)**, 7 (2011)

刺激の影響を受けない一定値，$\varepsilon_1(t') = \tan\beta/2$，で与えられる。その結果，表 7.1 で示すように円錐圧子・ピラミッド圧子の粘弾性構成方程式は簡潔な表現式として

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \frac{\tan\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dA(t')}{dt'}dt' \\
A(t) &= 2\cot\beta\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt'
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

により与えられる。以下，円錐・ピラミッド圧子を対象とした汎用構成方程式(7.3)式を用い，各種の圧入試験における粘弾性挙動を考察する。

(i) ***ステップ状圧入試験***

接触面積 A_0 へのステップ圧入試験

$$A(t) = A_0 \cdot u(t) \tag{7.4}$$

で観察される圧入荷重緩和，圧入荷重 P_0 へのステップ負荷試験

$$P(t) = P_0 \cdot u(t) \tag{7.5}$$

で観察される接触面積クリープを考察してみる。(7.4)式および(7.5)式，それぞれを(7.3)式右辺の時間微分項に代入し，$du(t)/dt = \delta(t)$ ($\delta(t)$ ：Dirac のデルタ関数)の関係を利用することにより次式を得る；

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \frac{\tan\beta}{2}A_0 \cdot E'_{\mathrm{relax}}(t) \\
A(t) &= 2\cot\beta P_0 \cdot C'_{\mathrm{creep}}(t)
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

したがって圧入荷重緩和 $P(t)$ や接触面積クリープ $A(t)$ の計測から緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ およびクリープ関数 $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ を実験的に求めることが可能となる。圧子荷緩和挙動 $P(t)$ は汎用の計装化インデンター(instrumented indenter)により実測可能であるが，ステップ状接触面積 A_0 の付加や $A(t)$ の測定には，第 11.3 節で詳述する計装化顕微インデンテーション計測装置(instrumented indentation microscope)を用いる必要がある。一方，圧子接触面積の計測が出来ない汎用計装化インデンターを用いた場合，実測可能な圧入深さ $h(t)$ から圧子接触面 $A(t)$ の値を近似・仮定を用いた上で推算しなければならない(詳細については第 11.2 節参照)。

(ii) *定速度圧入試験*

圧子接触面積を一定の速度 k_A で増大させて行く定速圧入試験

$$A(t') = k_A \cdot t' \tag{7.7}$$

あるいは圧子圧入荷重を一定の速度 k_P で増大させて行く定速荷重負荷試験

$$P(t') = k_P \cdot t' \tag{7.8}$$

においては，(7.7)式，(7.8)式を(7.3)式に代入することにより圧子圧入荷重 $P(t)$ および圧子接触面積 $A(t)$ を，それぞれ，次式で記述することができる；

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{k_A \tan\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')dt' \\ A(t) &= 2k_P \cot\beta \int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')dt' \end{aligned} \tag{7.9}$$

したがって，次式で示すように実測される $P(t)$ 曲線あるいは $A(t)$ 曲線の時間微分として緩和関数 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$，クリープ関数 $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ を実験的に求めることができる；

$$\begin{aligned} E'_{\mathrm{relax}}(t) &= \frac{2\cot\beta}{k_A}\frac{dP(t)}{dt} \\ C'_{\mathrm{creep}}(t) &= \frac{\tan\beta}{2k_P}\frac{dA(t)}{dt} \end{aligned} \tag{7.10}$$

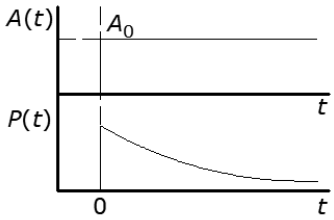
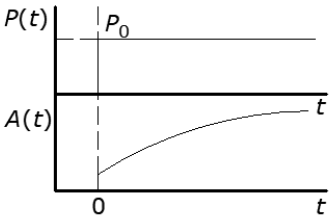
上述した円錐圧子を含む各種軸対称圧子形状に対する粘弾性刺激応答の詳細を表 7.1～表 7.3 に纏めて示しておく。

表 7.1 各種形状を有する軸対称圧子の圧入過程を記述する積分型構成方程式

平端円柱圧子	球形圧子	円錐圧子
$P(t) = 2a_0\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dh(t')}{dt'}dt'$	$P(t) = \frac{4}{3\pi^{3/2}R}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dA^{3/2}(t')}{dt'}dt'$	$P(t) = \frac{\tan\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dA(t')}{dt'}dt'$
$h(t) = \frac{1}{2a_0}\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt'$	$A^{3/2}(t) = \frac{3\pi^{3/2}R}{4}\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt'$	$A(t) = 2\cot\beta\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt'$

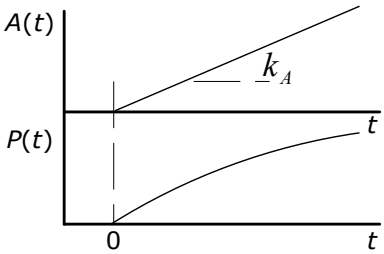
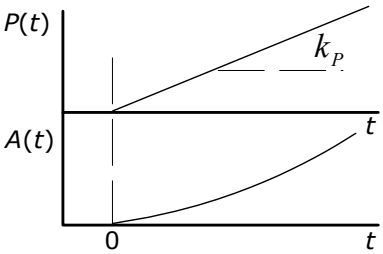
a_0：円柱圧子半径　　R：球圧子半径　　β：円錐圧子面傾き角度

表 7.2 ステップ圧入刺激への粘弾性応答

	定接触面積A_0へのステップ圧入	定荷重P_0へのステップ圧入
		
平端円柱圧子	$P(t)=2a_0h_0E'_{\mathrm{relax}}(t)$	$h(t)=\dfrac{P_0}{2a_0}C'_{\mathrm{creep}}(t)$
球形圧子	$P(t)=\dfrac{4}{3R}\left(\dfrac{A_0}{\pi}\right)^{3/2}E'_{\mathrm{relax}}(t)$	$A^{3/2}(t)=\dfrac{3\pi^{3/2}RP_0}{4}C'_{\mathrm{creep}}(t)$
円錐圧子	$P(t)=\dfrac{\tan\beta}{2}A_0E'_{\mathrm{relax}}(t)$	$A(t)=2P_0\cot\beta\cdot C'_{\mathrm{creep}}(t)$

＊　円柱圧子では接触面積 $A(t)$， A_0 の代わりに圧入深さ $h(t)$， h_0 を用いる

表 7.3 定速圧入刺激への粘弾性応答

	定速圧入	定速負荷
		
平端円柱圧子	$\dfrac{dP(t)}{dt}=2a_0k_hE'_{\mathrm{relax}}(t)$	$\dfrac{dh(t)}{dt}=\dfrac{k_P}{2a_0}C'_{\mathrm{creep}}(t)$
球形圧子	$\bar{P}(p)=\dfrac{k_A^{3/2}}{\pi R}\dfrac{\bar{E}'_{\mathrm{relax}}(p)}{p^{3/2}}$	$\dfrac{dA^{3/2}(t)}{dt}=\dfrac{3\pi^{3/2}Rk_P}{4}C'_{\mathrm{creep}}(t)$
円錐圧子	$\dfrac{dP(t)}{dt}=\dfrac{k_A}{2}\tan\beta\cdot E'_{\mathrm{relax}}(t)$	$\dfrac{dA(t)}{dt}=2k_P\cot\beta\cdot C'_{\mathrm{creep}}(t)$

＊　円柱圧子では接触面積 $A(t)$ の代わりに圧入深さ $h(t)$ を用いる

7.2　粘弾性 Meyer 硬度

時間依存性・刺激速度依存性を有しない弾性・弾塑性領域において，圧子荷重 P を圧子の接触正射影面積 A で除した値 $H_{\mathrm{M}} = P/A$ として Meyer 硬度 H_{M} は定義されている((5.1b)式)。したがって「弾性-粘弾性対応原理」を用いた Laplace 空間における Meyer 硬度の表示，$\bar{P} = H_{\mathrm{M}}{}^{*} \cdot \bar{A}$，に逆 Laplace 変換を施すことにより実空間における時間・刺激速度依存性を有する線形粘弾性体 Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t)$ を次式を用いて表現することができる；

$$P(t) = \int_0^t H_{\mathrm{M}}(t-t')\frac{dA(t')}{dt'}dt' \tag{7.11}$$

上式から容易に分かるように，粘弾性 Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t)$ は時間 t における圧子荷重 $P(t)$ を同一時刻における接触面積 $A(t)$ で除した値として与えられるものではない，すなわち，時間依存性を示さない弾性・弾塑性体の硬度表現式である $H_{\mathrm{M}} = P/A$ の関係は成立せず，常に $H_{\mathrm{M}}(t) \neq P(t)/A(t)$ となることに留意する必要がある。

ステップ状圧子圧入試験を例にとり粘弾性 Meyer 硬度の材料物理学的意味をさらに考察しておく。$A(t') = A_0 \cdot u(t')$ を(7.11)式に，また，$\varepsilon_{\mathrm{I}}(t') \cdot A(t') = \varepsilon_{\mathrm{I}0} A_0 \cdot u(t')$ を(7.1)式に，それぞれ代入し，得られた結果を比較することにより，最終的に，緩和弾性率を用い粘弾性 Meyer 硬度を次式により記述することができる；

$$H(t) = \varepsilon_{\mathrm{I}0} E'_{\mathrm{relax}}(t) \tag{7.12}$$

上式において圧入歪 $\varepsilon_{\mathrm{I}0}$ は(3.29)式～(3.31)式を用いることにより

平端円柱圧子：　$$\varepsilon_{\mathrm{I}0} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{h_0}{a_0}\right) \tag{7.13a}$$

球圧子：　$$\varepsilon_{\mathrm{I}0} = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{a_0}{R}\right) \tag{7.13b}$$

円錐圧子：　$$\varepsilon_{\mathrm{I}0} = \frac{\tan\beta}{2} \tag{7.13c}$$

で与えられる。ここに h_0 および a_0 は，それぞれ，円柱圧子のステップ圧入深さ，および球形圧子のステップ圧入により形成される接触半径を意味する（(7.13a)式の a_0 は円柱圧子半径)。円錐圧子およびピラミッド圧子はその幾何相似性 (geometrical similarity) に由来し，圧入歪 $\varepsilon_{\mathrm{I}0}$ は圧子の面傾き角度 β のみに規定され，圧入量に依存しない圧子固有の一定値，$\varepsilon_{\mathrm{I}0} = \tan\beta/2$，を有しているため，(7.13c)式の圧入歪 $\varepsilon_{\mathrm{I}0}$ を任意の圧入深さへのステップ圧入に対し

て適用することが出来る。粘弾性 Meyer 硬度は緩和弾性率と等価な物理量であることを(7.12)式は意味している。この事実は，円錐圧子を接触面積 A_0 へステップ圧入した際に観測される「荷重緩和 $P(t)$」を表現した(7.6)式に，$H_{\mathrm{M}}(t)=P(t)/A_0$，を適用して算出される硬度が(7.12)式に等しくなることからも裏付けられる。

7.3　モデル粘弾性体の圧子力学挙動

面傾き角度 β を有する円錐圧子を用いた定速圧入試験((7.7)式および(7.8)式；表 7.3)を例にとり，第 6 章で詳述した粘弾性液体を記述する Maxwell モデル，および粘弾性固体を表現する Zener II モデル(図 6.2 参照；以降の解析結果を簡潔に表すため $E_{\mathrm{M}}=E_{\mathrm{e}}$ で与えられるモデル)を用いた圧子力学挙動に関する数値解析結果について考察する。

【圧子接触面積の定速付加試験】

接触面積の定速付加 $A(t')=k_A\cdot t'$ に対する円錐圧子圧入荷重の粘弾性時間応答は，(7.9)式の第一式

$$P(t)=\frac{k_A\tan\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')dt' \qquad (7.9a)$$

により表現出来る。この式に，(6.8a)式および(6.8b)式に示す Maxwell モデル，および Zener II モデルの緩和弾性率を代入することにより，次に示す圧入荷重の時間応答表現を得る；

(i)　*Maxwell 粘弾性液体*

$$P(t)=\frac{E'_{\mathrm{M}}\tan\beta}{2}\left(k_A\tau_{\mathrm{M}}\right)\left[1-\exp\left(-t/\tau_{\mathrm{M}}\right)\right] \qquad (7.14)$$

(ii)　*Zener 粘弾性固体*

$$P(t)=\frac{E'_{\mathrm{M}}\tan\beta}{2}\left(k_A\tau_{\mathrm{M}}\right)\left[t/\tau_{\mathrm{M}}+\left\{1-\exp\left(-t/\tau_{\mathrm{M}}\right)\right\}\right] \qquad (7.15)$$

また，(7.14)式および(7.15)式の無次元表記である無次元圧子荷重 $P_{\mathrm{N}}\left(t/\tau_{\mathrm{M}}\right)\left[\equiv\left(2P(t)\cot\beta\right)/\left(k_A\tau_{\mathrm{M}}\cdot E'_{\mathrm{M}}\right)\right]$ と無次元時間 t/τ_{M} との関係を図 7.1 に示す。$t\gg\tau_{\mathrm{M}}$ となる長時間域において，Maxwell 粘弾性液体の無次元圧子荷重は $P_{\mathrm{N}}(t/\tau_{\mathrm{M}})\to 1.0$ あるいは $P(t)\to\left(k_A\tan\beta/2\right)\eta$ に収束する。この挙動は，Maxwell 粘弾性流体が長時間域において粘度 η を有する純粘性流体として「定常流

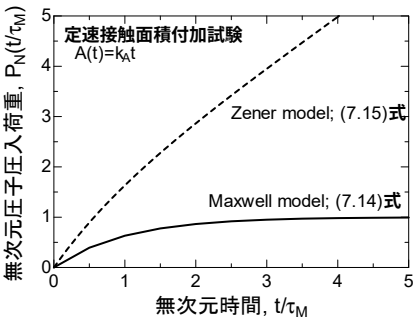


図 7.1 圧子接触面積の定速付加試験。実線は Maxwell 粘弾性液体，破線は Zener 粘弾性固体モデルを示す

動」していることを意味している。一方，$t \gg \tau_{\mathrm{M}}$ で与えられる長時間域において，Zener 粘弾性固体モデルの $P_{\mathrm{N}}(t/\tau_{\mathrm{M}})$ と t/τ_{M} との間には図 7.1 に示すように勾配 1.0 の直線関係が成り立ち $P_{\mathrm{N}}(t/\tau_{\mathrm{M}}) \propto t/\tau_{\mathrm{M}} \propto A(t)/k_A\tau_{\mathrm{M}}$，あるいは，$P(t) \propto (E'_{\mathrm{e}} \tan\beta/2)\,A(t)$ により表現出来る(本章で用いた Zener モデルでは解析結果を簡潔に表すため $E'_{\mathrm{M}} = E'_{\mathrm{e}} = E'_{\mathrm{g}}/2$ で与えられていることに留意)。この直線関係は長時間域において Zener モデルが弾性率 E'_{e} を有する完全弾性体として振る舞うことを意味している。

【圧子荷重の定速付加試験】

圧子荷重の定速付加 $P(t') = k_P \cdot t'$ に対する円錐圧子接触面積の粘弾性時間応答は，(7.9)式の第二式

$$A(t) = 2k_P \cot\beta \int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')dt' \qquad (7.9b)$$

により記述される。この式に(6.9a)式および(6.9b)式で与えた，Maxwell モデルと Zener II モデル，それぞれのクリープ関数を代入することにより次に示す圧子接触面積の時間応答を得る；

(i) *Maxwell 粘弾性液体*

$$A(t) = \frac{2\cot\beta}{E'_{\mathrm{M}}}(k_P\tau_{\mathrm{M}})\left[t/\tau_{\mathrm{M}} + \frac{1}{2}(t/\tau_{\mathrm{M}})^2\right] \qquad (7.16)$$

(ii) *Zener 粘弾性固体*

$$A(t) = \frac{2\cot\beta}{E'_{\mathrm{M}}}(k_P\tau_{\mathrm{M}})\left[t/\tau_{\mathrm{M}} - \{1-\exp(-t/\tau_{\mathrm{Z}})\}\right] \qquad (7.17)$$
$$\tau_{\mathrm{Z}} = (1 + E_{\mathrm{M}}/E_{\mathrm{e}})\tau_{\mathrm{M}}$$

$E_{\mathrm{M}} = E_{\mathrm{e}}$ を仮定した Zener モデルを用いているため，Zener 緩和時間 τ_{z} は $\tau_{\mathrm{z}} = 2\tau_{\mathrm{M}}$ により与えられる。(7.16)式および(7.17)式の無次元圧子接触面積 $A_{\mathrm{N}}(t/\tau_{\mathrm{M}})[\equiv A(t)E'_{\mathrm{M}}\tan\beta/2k_P\tau_{\mathrm{M}}]$ を無次元時間 t/τ_{M} に対してプロットした数値解を図 7.2 に示す。$t \gg \tau_{\mathrm{M}}$ で与えられる長時間域において，Zener 粘弾性固体モデルの $A_{\mathrm{N}}(t/\tau_{\mathrm{M}})$ と t/τ_{M} との間には図 7.2 に示すように勾配 1.0 の直線関係，すなわち，$A_{\mathrm{N}}(t/\tau_{\mathrm{M}}) \propto t/\tau_{\mathrm{M}} = P(t)/k_P\tau_{\mathrm{M}}$，あるいは，$P(t) \propto E'_{\mathrm{e}}\,A(t)$ の関係が成り立つ。この事実は，Zener モデルが，先に示した接触面積の定速付加試験と同様に，長時間領域において弾性率 E'_{e} を有する完全弾性体として振る舞うことを意味している。

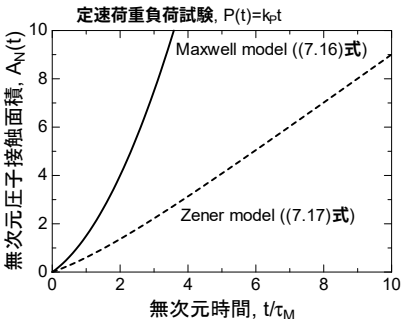


図 7.2 定速負荷試験。実線は Maxwell 粘弾性液体, 破線は Zener 粘弾性固体モデルを示す

(7.11)式に示したように粘弾性 Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t)$ の記述に当たっては, 弾塑性体硬度類似表現である $H_{\mathrm{M}}(t)=P(t)/A(t)$ の関係は成立せず，常に $H_{\mathrm{M}}(t)\neq P(t)/A(t)$ となることを第 7.2 節で強調した。 (7.11)式を用いて求めた Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t)$ と(7.14)式～(7.17)式を利用して求めた $P(t)/A(t)$ との間に存在する相違の可視化無次元プロットを図 7.3 および図 7.4 に示す。これらの図の縦軸(硬度軸)，$\left[H_{\mathrm{M}}(t)\right]_{\mathrm{N}}$ あるいは $\left[P(t)/A(t)\right]_{\mathrm{N}}$ は， $H_{\mathrm{M}}(t)$ あるいは $P(t)/A(t)$ を $E'_{\mathrm{g}}\tan\beta/2$ により無次元化した硬度パラメータを意味しており，横軸(時間軸) t は τ_{M} により無次元化されている。$P(t)/A(t)$ で表した疑似硬度(○印，●印)は粘弾性 Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t)$ (実線)に比べて，その緩和挙動が常に緩慢である。その結果，疑似硬度 $P(t)/A(t)$ は $H_{\mathrm{M}}(t)$ を常に過大評価してしまうことが分かる。粘弾性液体表す Maxwell モデルでは，時間の経過 $(t/\tau\to\infty)$ と共に，これらの硬度はゼロへと減衰する。一方，粘弾性固体を表す Zener モデルでは，時間の経過と共に，平衡弾性率 E'_{e} へと減衰収束する(図 7.4 の無次元化グラフでは，$E'_{\mathrm{e}}/E'_{\mathrm{g}}(=0.5)$ へと減衰収束する)。

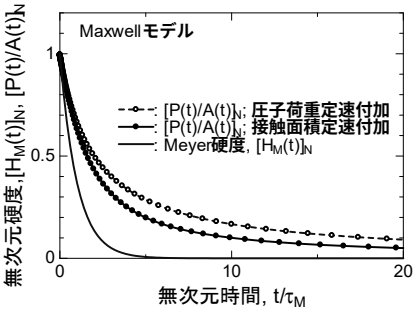


図 7.3 無次元粘弾性 Meyer 硬度 $\left[H_{\mathrm{M}}(t)\right]_{\mathrm{N}}$ および $\left[P(t)/A(t)\right]_{\mathrm{N}}$ と無次元時間 t/τ_{M} の関係(Maxwell 粘弾性液体)

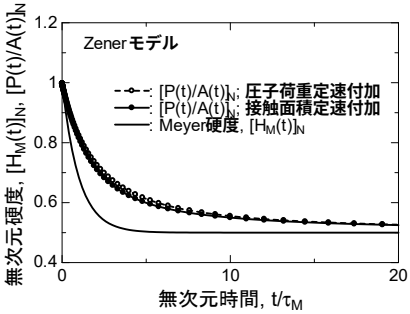


図 7.4 無次元粘弾性 Meyer 硬度 $\left[H_{\mathrm{M}}(t)\right]_{\mathrm{N}}$ および $\left[P(t)/A(t)\right]_{\mathrm{N}}$ と無次元時間 t/τ_{M} の関係(Zener 粘弾性固体)

8 表面付着力を有するソフトマターの圧子力学

金属材料やセラミック材料等の工業材料に代表される比較的弾性率の大きい（$E' \geq 100$ GPa），いわゆる「ハードマテリアル」の場合，その表面に付着力が存在していても高弾性率ゆえに圧子力学挙動に及ぼす表面力の影響は相対的に小さく，多くの場合これを無視することができる。一方，高分子，ゾル・ゲル，コロイド，液晶，各種生体材料，細胞増殖培地等に代表される「ソフトマテリアル，ソフトマター」（soft material, soft matter）の弾性率は上記工業材料に比べると小さく（$E' \approx 1$ kPa～100MPa），表面付着力がこれらソフトマターの諸特性・諸機能に著しい影響を及ぼす。しかも多くのソフトマターは時間依存・変形速度依存を示す弾塑性体・粘弾性体として振る舞う。

表面付着力を有する完全弾性体の圧子力学(Indentation Contact Mechanics)に関しては，Johnson-Kendall-Roberts 理論（JKR 理論）に基づいた理論体系が構築されている**[2.2, 4.1, 8.1]**。一方，表面付着力を有する弾塑性体・粘弾性体圧子力の体系化は，現在までのところ，実験・理論解析共にその端緒にすら就いていないのが現状である。本章においては，JKR 理論の詳細を論じるとともに，表面付着力を有する弾塑性体に対しては有限要素法を適用した数値圧子力学を展開する。さらに，「弾性-粘弾性対応原理」の JKR 理論への適用により表面付着力を有する粘弾性体の圧子力学理論の構築も試みる。

8.1 弾性体

JKR 理論では「球形圧子」圧入に焦点を当て表面付着力を有する弾性体の圧子力学が論じられている。本節では実用材料の圧子力学評価で広く採用されているピラミッド圧子（Vickers/Berkovich 圧子）等価「円錐圧子」への JKR 理論の拡張についても考察を加える。

任意形状を有する軸対称圧子を圧入荷重 P で弾性体に圧入した際の圧入深さを h，その際に形成される圧子接触半径を a とする。表面付着力が存在する場合，圧子はその接触面に作用する付着力により弾性体側に引き寄せられる（**表面付着力により「負」の圧子圧入力が生じる**）。したがって圧入深さ h で観測される圧入荷重 P は表面付着力の無い場合に比べ，その値が小さくなる。**「接触半**

[8.1] K.L. Johnson, K. Kendall, A.D. Roberts, “Surfeace energy and the contact of elastic solids”, Proc. Roy. Soc. London A, 324:301-313(1971)

径が同じく a により与えられる平端円柱圧子に作用する負の圧入力」として，この表面付着力の影響をモデル化したものが JKR 理論である。

平端円柱圧子（半径 a ）の接触圧力分布 $p(r)$ は次式により与えられる **[2.2, 4.1, 8.1]**；

$$p_{\mathrm{F}}(r) = p_{\mathrm{F}}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-1/2} \quad ; \quad 0 \le r < a \tag{8.1}$$

上式において添え字 F は Flat punch を意味する。(8.1)式を用いて表面付着力を表現する場合，圧子は弾性体表面に引き寄せられるため，係数 p_{F} は「負の値」($p_{\mathrm{F}} < 0$)を有する。同様にして球形圧子の圧入圧力分布は

$$p_{\mathrm{S}}(r) = p_{\mathrm{S}}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2} \quad ; \quad 0 \le r < a \tag{8.2}$$

また，円錐圧子の圧入圧力分布は

$$p_{\mathrm{C}}(r) = p_{\mathrm{C}}\cosh^{-1}\left(\frac{a}{r}\right); \quad 0 \le r < a \tag{8.3}$$

を用いて，それぞれ，表現される**[2.2]**。上式において係数 p_{S}， p_{C} の添え字 S および C は球圧子(Sphere), 円錐圧子(Cone)をそれぞれ表す。したがって付着力を有する完全弾性体への圧子圧入において，圧子直下に生じる接触圧力分布は(8.1)式と(8.2)式あるいは(8.3)式の圧力分布を重ね合わせることにより

球形圧子圧入

$$p(r) = p_{\mathrm{S}}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2} + p_{\mathrm{F}}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{8.4}$$

円錐圧子圧入

$$p(r) = p_{\mathrm{C}}\cosh^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) + p_{\mathrm{F}}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{8.5}$$

を用いて表現出来る。

一方，球圧子あるいは円錐圧子を深さ h まで圧入した際に誘起される圧子直下（ $0 \le r \le a$ ）弾性体表面形状は下記する幾何学的関係式により記述することが出来る；

球形圧子圧入

$$u_z(r) = h - \frac{r^2}{2R} \tag{8.6}$$

円錐圧子圧入

$$u_z(r) = h - r\tan\beta \tag{8.7}$$

(8.4)式あるいは(8.5)式で示した圧子直下接触圧力によって(8.6)式あるいは(8.7)式で示した圧入方向接触表面変形が誘起される。これらの関係式を完全弾性体（弾性率 $E'[=E/(1-\nu^2)]$；E：ヤング率，ν：ポアソン比）の構成方程式に適用することにより最終的に次に示す諸関係式が得られる（3.2 節，3.3 節参照）；

【球圧子圧入】

$$\frac{\pi p_S}{4aE'}\left(2a^2 - r^2\right) + \frac{\pi a p_F}{E'} = h - \frac{r^2}{2R} \tag{8.8}$$

r に関する恒等式となるよう上式の両片を比較することに

$$p_S = \frac{2aE'}{\pi R} \tag{8.9}$$

$$h = \frac{\pi a}{2E'}\left(p_S + 2p_F\right) \tag{8.10}$$

更に圧入荷重が $P = \int_0^a p(r)2\pi r dr$ で表現できることより

$$P = \left(\frac{2}{3}p_S + 2p_F\right)\pi a^2 \tag{8.11}$$

の関係を得る。

【円錐圧子圧入】

上記の球形圧子圧入過程に施したと同様の数学的演算を行うことにより

$$\frac{\pi a p_C}{E'}\left(1 - \frac{2}{\pi}\frac{r}{a}\right) + \frac{\pi a p_F}{E'} = h - r\tan\beta \tag{8.8'}$$

$$p_C = \frac{E'}{2}\tan\beta \tag{8.9'}$$

$$h = \frac{\pi a}{E'}\left(p_S + p_F\right) \tag{8.10'}$$

$$P = \left(p_C + 2p_F\right)\pi a^2 \tag{8.11'}$$

の関係が存在する。

(8.9)式および(8.9')式が示すように, 接触圧力分布係数 p_S および p_C は注目している完全弾性体の弾性率 E' に関係づけられる。一方，表面付着力 γ (N/m)と表面エネルギー γ (J/m^2)との等価性に着目することにより以下に示すエネルギー論的考察から平端円柱圧子接触圧力分布係数 p_F を γ に関係付けることができる。

「*表面付着力の存在しない*完全弾性体」に軸対称圧子を荷重 P_1 まで圧入した際の P - h 曲線を図 8.1(a)に示す。その際の圧入深さを h_1，接触半径を a_1 とする。この圧入過程で弾性体に蓄積される弾性歪エネルギーを U_1 とすると，$U_1 = \int_0^{h_1} Pdh$ の関係より

球形圧子圧入：

$$U_1 = \frac{2}{15}\frac{\pi^2 a_1^{\,3}}{E'} p_{S1}^{\,2} \tag{8.12}$$

円錐圧子圧入：

$$U_1 = \frac{\pi^2 a_1^{\,3}}{3E'} p_{C1}^{\,2} \tag{8.13}$$

を得る。蓄積弾性歪エネルギー U_1 は図 8.1(a)に示す面積 OABO により与えられる。(8.12)式および(8.13)式において p_{S1}，p_{C1} は接触半径 a_1 での球圧子および円錐圧子の接触圧力分布係数であり，それぞれ，$p_{S1} = 2a_1E'/\pi R$ および $p_{C1} = (E'/2)\tan\beta$ で与えられる（円錐圧子の場合，その幾何相似性により p_{C1} は接触半径に依存しない定数で与えられる）。

引き続く第二段階操作として，図 8.1(b)に示すように，上述の圧子力学環境(P_1，h_1，a_1)（図 8.1(b)の A 点）において，接触面（面積 $\pi a_1^{\,2}$）に付着力（表面エネルギー）を 0 から γ へと漸増付与する力学過程で生じる系のエネルギー変化を考える。付着力の付与により圧子は弾性体表面に引き寄せられる。この力学過程は，図 8.1(b)に示す線分 AC に沿う「半径 a_1 を有する*平端円柱圧子*の徐荷過程」として扱うことが出来る。すなわち，付着力を付与することにより先に示した第一段階で「蓄積された歪エネルギー」の一部がこの「徐荷過程で解放」される。付着力を所定の値である γ まで増加させた時点での**力学平衡**にある系の圧子力学環境を(P_2，h_2，a_1)（図 8.1(b)の C 点）とすると，付着力漸増付与に伴う徐荷過程での解放エネルギー $U_2\,(<0)$ は図 8.1(b)に示す面積 ABDCA（$= -U_2$）により与えられる。付着力の付与に伴う徐荷過程は先

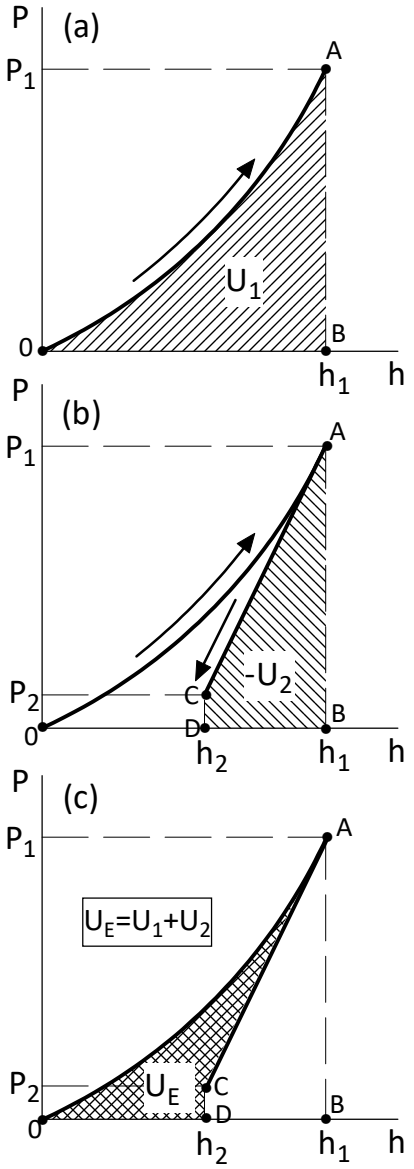


図 8.1 表面付着力を有する弾性体への圧子圧入過程に伴うエネルギー論的考察：(a)表面付着力の存在しない完全弾性体への圧子圧入過程（線分 OA），(b)表面付着力の付与に伴う徐荷過程（線分 AC），(c)表面付着力を有する完全弾性体に A 点まで圧子を圧入した際に系に蓄積される弾性歪エネルギー U_E

に述べたように半径a_1の平端円柱圧子の徐荷過程として扱うことが出来るため, この徐荷過程を次式により記述することが出来る;

$$
\begin{aligned}
P &= P_1 + 2\pi a_1{}^2 p_{\mathrm{F1}} \\
&= 2a_1 E'\left(h - h_1\right) + P_1 \qquad (8.14) \\
h &= h_1 + \frac{\pi a_1}{E'} p_{\mathrm{F1}}
\end{aligned}
$$

ここに, $p_{\mathrm{F1}}(<0)$は平端円柱圧子（半径a_1）の接触圧力分布係数（(8.1)式参照）であり, 付着力に起因するため負の値を有する。図 8.1(a)に示した A 点での荷重P_1は, 球形圧子圧入の場合$P_1 = \left(2\pi a_1{}^2/3\right)p_{\mathrm{S1}}$, 円錐圧子の場合$P_1 = \pi a_1{}^2 p_{\mathrm{C1}}$により与えられる。一方, 付着力の付与により系外に解放されるエネルギー$U_2(<0)$は$U_2 = \int_{h_1}^{h_2} P dh = \int_{P_1}^{P_2} P \frac{dP}{2a_1 E'} = \frac{P_2{}^2 - P_1^2}{4a_1 E'}$で与えられるため, 解放エネルギー$U_2$として最終的に以下の表現式を得る;

球形圧子圧入

$$U_2 = \frac{\pi^2 a_1{}^3}{E'}\left(\frac{2}{3}p_{\mathrm{S1}}p_{\mathrm{F1}} + p_{\mathrm{F1}}{}^2\right) \qquad (8.15)$$

円錐圧子圧入

$$U_2 = \frac{\pi^2 a_1{}^3}{E'}\left(p_{\mathrm{C1}}p_{\mathrm{F1}} + p_{\mathrm{F1}}{}^2\right) \qquad (8.16)$$

したがって「付着力を有する」完全弾性体に圧子接触半径がaとなるまで軸対称圧子を圧入した際の弾性歪エネルギーU_{E}（図 8.1(c）の面積 OACDO)は, (8.12), (8.13), (8.15), 及び(8.16)式より球形圧子圧入では

$$U_{\mathrm{E}}\left(\equiv U_1 + U_2\right) = \frac{\pi^2 a^3}{E'}\left(\frac{2}{15}p_{\mathrm{S}}{}^2 + \frac{2}{3}p_{\mathrm{S}}p_{\mathrm{F}} + p_{\mathrm{F}}{}^2\right) \qquad (8.17a)$$

あるいは, 上式に(8.9), (8.10)式を代入し

$$
\begin{aligned}
&U_{\mathrm{E}}\left(\equiv U_1 + U_2\right) \\
&\quad = \frac{\pi^2 a^3}{E'}\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{aE'}{\pi R}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{E'^2}{\pi^2 R}h + \left(\frac{E'}{\pi a}\right)^2 h^2\right\}
\end{aligned}
$$

(8.17b)

円錐圧子圧入では

$$U_{\mathrm{E}}\left(\equiv U_1+U_2\right)=\frac{\pi^2 a^3}{E'}\left(\frac{1}{3}{p_{\mathrm{C}}}^2+p_{\mathrm{C}}p_{\mathrm{F}}+{p_{\mathrm{F}}}^2\right) \tag{8.18a}$$

あるいは，上式に(8.9’)，(8.10’)式を代入し

$$\begin{aligned}&U_{\mathrm{E}}\left(\equiv U_1+U_2\right)\\&\quad=\frac{\pi^2 a^3}{E'}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{E'\tan\beta}{2}\right)^2-\frac{E'^2\tan\beta}{2\pi a}h+\left(\frac{E'}{\pi a}\right)^2 h^2\right\}\end{aligned} \tag{8.18b}$$

により記述することが出来る。

先に述べたように付着力は表面エネルギーU_{S}を用いることにより定量記述することができる。圧子と試験体間の表面接触による自由表面積の減少はU_{S}の減少をもたらし，これとは逆に接触界面の剥離に伴う自由表面積の増加はU_{S}の増加につながる；

$$U_{\mathrm{S}}=-2\gamma\pi a^2 \tag{8.19}$$

以上の考察より注目する力学系の全エネルギー（自由エネルギー）U_{T}は

$$U_{\mathrm{T}}=U_{\mathrm{E}}+U_{\mathrm{S}} \tag{8.20}$$

により記述することができる。ここで系の熱力学的平衡状態について考える。系内外への力学的仕事の存在しない，すなわち，圧子圧入変位hを一定に保った状態で接触半径の仮想的微小増分δaを想定すると，熱力学的平衡状態において次式が成立する；

$$\left(\frac{\partial U_{\mathrm{T}}}{\partial a}\right)_h=0 \tag{8.21}$$

(8.17)式～(8.20)式を(8.21)式に代入し，更に(8.17b)式あるいは(8.18b)式より，球形圧子，円錐圧子共に$\left(\partial U_{\mathrm{E}}/\partial a\right)_h=\left(\pi^2 a^2/E'\right){p_{\mathrm{F}}}^2$の関係が成り立つことから，最終的に平端円柱圧子圧力分布係数p_{F}を次式により付着力（付着エネルギー）γに関係付けることができる；

$$p_{\mathrm{F}}=-\sqrt{\frac{4\gamma E'}{\pi a}} \tag{8.22}$$

以上の考察で得られたp_{S}（(8.9)式），p_{C}（(8.9’) 式），p_{F}（(8.22)式）を(8.10)式，(8.11)式に，あるいは(8.10’)式，(8.11’)式に代入す

ることにより，最終的に圧入深さhおよび圧入荷重Pを接触半径aを用いて表現した次式を得る；

球形圧子圧入

$$h=\frac{a^2}{R}-2\sqrt{\frac{\pi\gamma}{E'}}a^{1/2} \tag{8.23}$$

$$P=\frac{4E'}{3R}a^3-4\sqrt{\pi\gamma E'}a^{3/2} \tag{8.24}$$

円錐圧子圧入

$$h=\frac{\pi\tan\beta}{2}a-2\sqrt{\frac{\pi\gamma}{E'}}a^{1/2} \tag{8.23'}$$

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{E'}{2}\tan\beta\right)\pi a^2-4\sqrt{\pi\gamma E'}a^{3/2}\\&=\left(\frac{E'}{2}\tan\beta\right)A-4\sqrt{\frac{\gamma E'}{\pi^{1/2}}}A^{3/4}\end{aligned} \tag{8.24'}$$

ここに，$A\left(=\pi a^2\right)$は圧子接触面積を意味する。付着エネルギー$\gamma=0$を代入することにより，上記各式は，それぞれ，表面付着力の存在しない完全弾性体の圧子力学関係式に帰着される。「**計装化顕微インデンテーション計測装置**」を用いると，圧子圧入荷重Pのみならず圧子接触半径aあるいは接触面積Aを実測出来るので，上式を用いることにより**試験体の弾性率E'のみならず付着エネルギーγを実測データから定量的に求めることが可能となる**。一方，慣用の計装化インデンテーション計測装置を用いた圧子圧入試験で求められる圧子荷重と圧入深さの関係，すなわち，P-h関係については，(8.23)式～(8.24')式から分かるよう陽関数を用いて両者を結び付けることには難がある。しかし，接触半径aを媒介変数とした陰関数で数値解析的に両者を関係付けることは可能である。

表面付着力が圧子力学挙動に及ぼす影響への理解を深めるため，円錐圧子圧入を例に，そのP-A関係（(8.24')式）を図 8.2 に示す。図 8.2(a)において$\gamma=0$ N/mで与えられる直線は表面付着力の存在しない完全弾性体の線形P-A関係，$P=\left(E'\tan\beta/2\right)A$，を表している。図 8.2 から分かるように，付着エネルギーγの増大と共に，また弾性率E'の低下と共にP-A関係に及ぼす表面付着力の影響が著しくなる。換言すると，付着エネルギーが大きいほど，そし

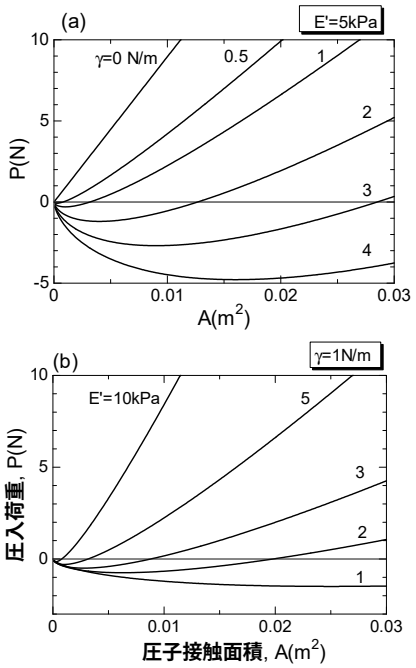


図 8.2 表面付着力を有する弾性体への円錐圧子圧入で観測されるP-A 関係：

(a) E' = 5kPa, γ =0N/m～4N/m

(b) γ =1N/m, E' =1kPa～10kPa

て低弾性率弾性体（ソフトマター）になるにしたがって表面付着力の影響が著しくなり，P-A関係に著しい非線形性が現れる。

上述の圧子力学諸関係式を無次元表記することにより表面付着力の影響を普遍的に俯瞰することを次に試みる。図 8.2 から容易に分かるように表面付着力によりP-A関係あるいはP-a関係は下に凸の曲線を形成し，固有の接触面積A_cあるいは接触半径a_cで圧子圧入荷重はその最小値P_cを取る。本節では無次元化に必要となる接触半径, 圧子荷重, 圧入深さの特性値（固有値）として, $dP/da=0$を与える接触半径, すなわち圧入荷重に極小値を与える接触半径を固有接触半径 a_c, この極小圧子荷重$P(a_c)=P_c(<0)$の絶対値$|P_c|$を固有圧子荷重，そして球形圧子の場合には$h(a_c)=h_c(<0)$の絶対値$|h_c|$, 円錐圧子の場合には$h_c(>0)$を, それぞれ固有圧入深さと定義する。球形圧子圧入および円錐圧子圧入それぞれについて, これらの固有値は弾性率E'と付着エネルギーγを用い次のように表現することが出来る；

球形圧子圧入

$$
\begin{aligned}
a_c &= \left(\frac{9\pi\gamma R^2}{4E'}\right)^{1/3} \\
P_c &= -3\pi\gamma R \\
h_c &= -\left(\frac{3\pi^2\gamma^2 R}{16E'^2}\right)^{1/3}
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

円錐圧子圧入

$$
\begin{aligned}
a_c &= \frac{36\gamma}{\pi E'\tan^2\beta} \\
P_c &= -\left(\frac{6}{\pi\tan\beta}\right)^3\frac{\gamma^2}{E'} \\
h_c &= \frac{6\gamma}{E'\tan\beta}
\end{aligned}
\tag{8.25'}
$$

これらの固有値を用い規格化したP-aおよびh-a関係式を以下に示す；

球形圧子圧入

$$
\begin{aligned}
P_N &= a_N{}^3 - 2a_N{}^{3/2} \\
h_N &= 3a_N{}^2 - 4a_N{}^{1/2}
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

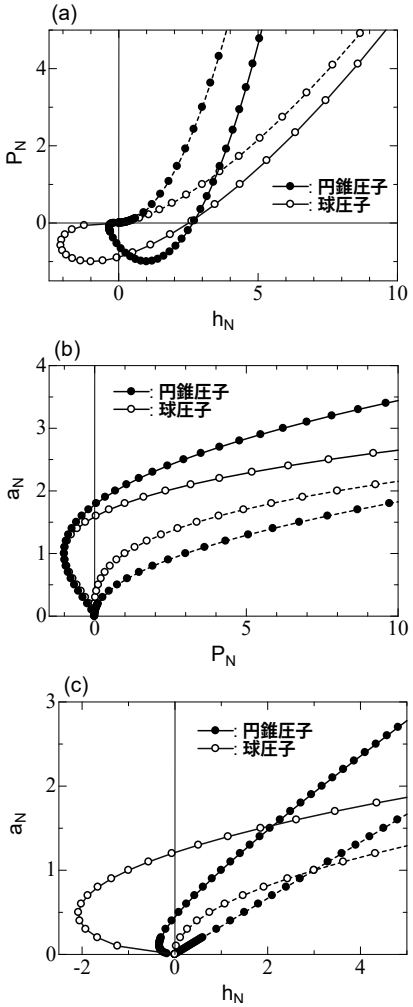


図 8.3 弾性体の規格化圧子力学曲線。実線は表面付着力を考慮した JKR 理論, 破線は表面付着力の存在しない完全弾性体の圧子力学曲線

円錐圧子圧入

$$P_{\mathrm{N}} = 3a_{\mathrm{N}}{}^{2} - 4a_{\mathrm{N}}{}^{3/2}$$
$$h_{\mathrm{N}} = 3a_{\mathrm{N}} - 2a_{\mathrm{N}}{}^{1/2} \qquad (8.26')$$

ここに a_{N}，P_{N}，h_{N} は，それぞれの固有値で規格化した接触半径 $a_{\mathrm{N}} = a/a_{\mathrm{c}}$，圧入荷重 $P_{\mathrm{N}} = P/|P_{\mathrm{c}}|$，および圧入深さ $h_{\mathrm{N}} = h/|h_{\mathrm{c}}|$（球形圧子）あるいは $h_{\mathrm{N}} = h/h_{\mathrm{c}}$（円錐圧子）を表す。一方，$P_{\mathrm{N}}$ - h_{N} 関係式は a_{N} を媒介変数とした(8.26)式あるいは(8.26')式から数値解として得ることができる。表面付着力を有する完全弾性体の規格化圧子力学表現式（(8.26)式あるいは (8.26')式）のプロットを図 8.3 に示す：●印は円錐圧子の，○印は球形圧子の規格化曲線をそれぞれ表しており，また，付着力の存在する弾性体のプロットは実線で，付着力の存在しない弾性体のプロットは破線により示されている。圧子が材料表面に接触した直後においては，円錐圧子が点接触であるのに対し，球形圧子は面接触であるため，図 8.3(a)および図 8.3(c)が示すように，後者の方が表面付着力の影響をより強く受けていることが分かる。

完全弾性体の**解析結果（JKR 理論）**（図 8.2 および図 8.3）との比較で，**Vickers/Berkovich 等価円錐圧子を用いた有限要素数値解析結果**（FEA 数値解析結果；最大圧入深さ $h_{\max} = 30\,\mu\mathrm{m}$ への負荷除荷試験）の一例を図 8.4 に示す。表面付着力が存在しない場合，P - A 負荷除荷関係（●印）（図中の破線は解析解；$P = (E'\tan\beta/2)A$）は直線となり，かつ負荷除荷に伴う履歴現象も観察されない。しかし表面付着力の付与により，その P - A 負荷除荷関係（○印及び実線）は非線形となり，**完全弾性体であるにもかかわらず著しい履歴現象を発現する**。また材料表面方向への圧子吸着効果により，前述したように，圧子圧入荷重は表面付着力の存在しない弾性体に比し著しく小さな値をとる。図 8.4 は表面付着力の有無にかかわらず，両者ともに同一の最大圧入深さ $h_{\max} = 30\,\mu\mathrm{m}$ への圧子圧入を行った FEA 試験結果を示しているにもかかわらず，同一の最大圧入深さで観測される接触面積 A に表面付着力の有無に起因した著しい相違のみられる点に留意しておく必要がある。すなわち，表面付着力の存在しない弾性体の最大接触面積が $A_{\max} \approx 100$ (x100 $\mu\mathrm{m}^2$)であるのに対し，付着力の付与により $A_{\max} \approx 180$ (x100 $\mu\mathrm{m}^2$)へと著しく増大している。表面付着力の付与による同様の圧子接触面積増大現象は JKR 理論においても

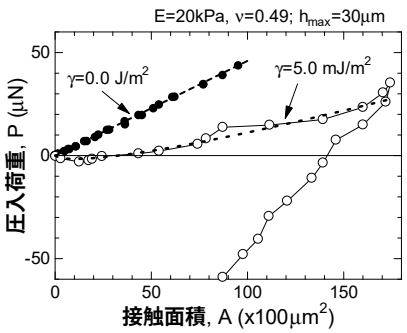


図 8.4 表面付着力効果（Vickers/Berkovich 等価円錐圧子を用いた FEA 数値解析結果；弾性率 $E' = 20\,\mathrm{kPa}$ を有する完全弾性体）。●印は表面付着力の存在しない完全弾性体の P - A 負荷除荷関係（破線は解析解）を示す。○印は表面付着力（$\gamma = 5.0$ mJ/m²）を有する完全弾性体の P - A 負荷除荷関係（点線は JKR 理論；(8.24')式，(8.27)式）

示されている（図 8.3(c)参照）。図 8.4 に示す○印に沿った点線は JKR 理論に基づいて予測された P - A **負荷**関係を示したものである（JKR 理論では P - A **除荷**関係を記述できない）。図 8.4 に示すように FEA 数値解析結果（○印）が JKR 理論（(8.24')式）；

$$P = \left(\frac{E'\tan\beta}{2}\right)A - \lambda_{\mathrm{E}} A^{3/4} \tag{8.27}$$

を忠実に再現していることが良く分かる。(8.27) 式において λ_{E} は

$$\lambda_{\mathrm{E}} = 4\sqrt{\frac{\gamma E'}{\pi^{1/2}}} \tag{8.28}$$

により与えられ，圧子と弾性体表面との間に形成される接触領域の付着強度を表す力学物性値，**付着靭性値(adhesion toughness)**，として定義される（λ_{E} の添え字 E は Elastic を表している）。付着靭性値の物理次元は線形破壊力学における破壊靭性値（fracture toughness）と同一の次元[Pa・m$^{1/2}$]を有している。換言すると，付着靭性値 λ_{E} は「付着領域におけるモード I 型剥離破壊靭性値 $K_{\mathrm{Ic}}\left(\equiv\sqrt{2\gamma E'}\right)$」としての力学的意味合いを有している。

8.2 弾塑性体

上述した完全弾性体とは異なり弾塑性体においては表面近傍で生じる塑性変形（塑性流動）が表面付着力・吸着力を緩和させる力学過程へと導く。したがって，共に同一の弾性率 E' を有する完全弾性体と弾塑性体（弾性率 E', 降伏応力 Y）とを比較した場合，同一の圧子接触面積 A で観測される圧入荷重への付着力寄与率 $\left[\left|P(\gamma)-P(\gamma=0)\right|/P(\gamma=0)\right]_A$ は，後者，すなわち弾塑性体のほうが常に小さくなる，すなわち表面付着力の影響を受け難くなると推察される。塑性変形の有無が付着靭性に及ぼす影響を FEA 数値解析結果の一例として図 8.5 に示す：塑性変形により付着靭性値が低下する，すなわち，塑性変形が存在することにより P - A 負荷曲線への表面付着力の影響が低減することを図 8.5 は示している。付着靭性値への塑性変形の影響を加味することにより弾性体に適用された JKR 理論（(8.27)式）を次式により弾塑性領域に拡張表現することができる；

$$P = H_{\mathrm{M}} A - \lambda_{\mathrm{EP}} A^{3/4} \tag{8.29}$$

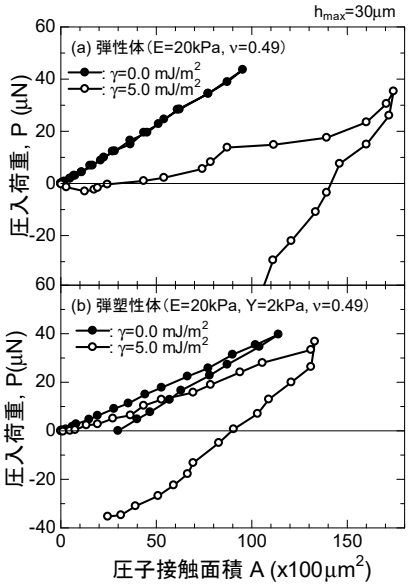


図 8.5

(a)完全弾性体（$E'=20\,\mathrm{kPa}$）および(b)弾塑性体（$E'=20\,\mathrm{kPa}$, $Y=2\,\mathrm{kPa}$）の P - A 負荷・除荷曲線（FEA 数値解析結果）。表面付着力の有無が P - A 曲線に及ぼす影響を●印（付着力なし；$\gamma=0.0\,\mathrm{mJ/m^2}$）および○印（付着エネルギー $\gamma=5.0\,\mathrm{mJ/m^2}$）で示す

(8.29)式において H_M は Meyer 硬度を表しており，**弾塑性付着靭性値** λ_{EP} は次式により定義される；

$$\lambda_{EP} = 4\sqrt{\frac{\gamma_{EP}E'}{\pi^{1/2}}} \tag{8.30}$$

(8.30)式で導入した γ_{EP} は塑性変形下での表面エネルギー（表面付着力），すなわち**弾塑性表面付着力（弾塑性表面エネルギー）**を意味する。弾塑性付着靭性 λ_{EP} あるいは弾塑性付着エネルギー γ_{EP} と降伏応力 Y との相関についての解析解が存在しないため，FEA 数値解析に基づいた経験則として，これらの相関式を誘導せざるを得ないのが現状である。

塑性流動が著しくなるに従い，すなわち，降伏応力 Y の低下とともに弾塑性付着エネルギー γ_{EP} が低下していく様子を，弾性率 $E = 20\,\mathrm{kPa}$ を有する弾塑性体を例に図 8.6 に示す（FEA 数値解析結果）。また，弾性率 E，降伏応力 Y，および付着エネルギー γ を異にする各種弾塑性体の弾塑性付着靭性 $\lambda_{EP}{}^2/E'\left(\equiv\left(16/\sqrt{\pi}\right)\gamma_{EP}\right)$ と付着エネルギー γ との相関プロット（FEA 数値解析結果）を図 8.7 に例示す。これらの図より塑性変形・流動が表面付着力に与える影響として以下の結論を得る：降伏応力 Y の低下に伴い，すなわち，塑性流動の顕在化と共に弾塑性付着靭性値 λ_{EP}，弾塑性付着エネルギー γ_{EP} は減衰し，その結果，これら弾塑性体の圧子力学応答における表面付着力の効果が消滅していく。逆に，降伏応力 Y の増大とともに $\gamma_{EP} \to \gamma$，$\lambda_{EP} \to \lambda_E$ へと漸近し，これら弾塑性体は JKR 理論で記述できる表面付着力を有する完全弾性体の圧子力学応答を示すようになる。図 8.7 に示した降伏応力および弾性率を異にする各種弾塑性体の $\lambda_{EP}{}^2/E'$ vs γ プロットを横対数軸に沿って左方向すなわち低エネルギー側に水平移動し破線で示した完全弾性体の JKR 理論曲線に重ね合わせたマスター曲線(master curve)を図 8.8 に示す。図 8.8 の横軸に示した a_γ は重ね合わせ操作の際に用いた各曲線の横対数軸水平方向移動量を表す移動因子(shift factor)と呼ばれる無次元量である。このようにして求めた a_γ は次式を介して付着エネルギー γ を用いて規格化した弾塑性付着エネルギー γ_{EP} に結び付けられる；

$$a_\gamma = \gamma_{EP}/\gamma \tag{8.31}$$

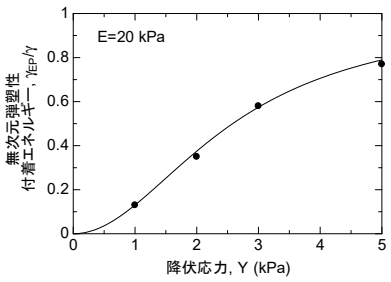


図 8.6　弾塑性体（弾性率：$E = 20$ kPa）の表面付着エネルギー γ_{EP} と降伏応力との相関（FEA 数値解析結果）。付着エネルギー γ で規格化した無次元弾塑性付着エネルギー γ_{EP}/γ の降伏応力 Y に対するプロット

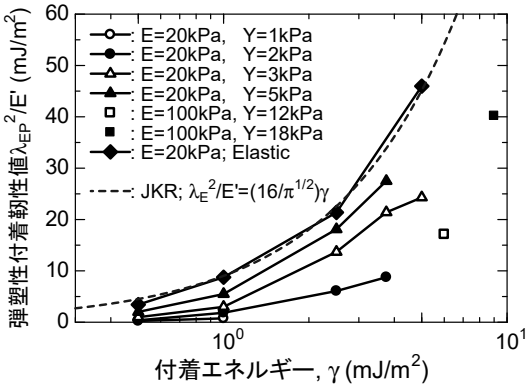


図 8.7 各種弾塑性体の弾塑性付着靭性 $\lambda_{\mathrm{EP}}{}^2/E'$ と付着エネルギー γ との相関プロット（FEA 数値解析結果）。完全弾性体の JKR 理論を破線で示す

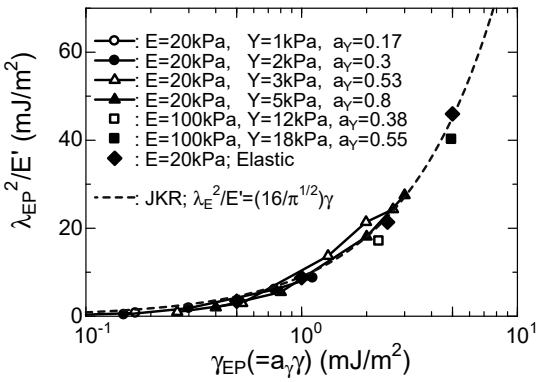


図 8.8 各種弾塑性体の $\lambda_{\mathrm{EP}}{}^2/E'$ vs γ_{EP} プロットのマスター曲線(master curve)。横対数座標軸に示す a_γ は図 8.7 の重ね合わせ操作で用いた移動因子を表している（図中の破線は JKR 理論）

(8.31)式で定義した移動因子 a_γ と弾塑性体の塑性変形能，すなわち塑性歪・塑性因子(plastic index, $PI(\equiv \varepsilon_1 E'/cY)$；第 5.1 節参照)との間には強い相関が存在し，完全弾性体($PI \downarrow 0$)で $a_\gamma \to 1$（$\gamma_{\mathrm{EP}} \to \gamma$），完全塑性体($PI \uparrow \infty$)で $a_\gamma \to 0$（$\gamma_{\mathrm{EP}} \to 0$）へと推移することが想定される。このことを実証するために，$a_\gamma(\equiv \gamma_{\mathrm{EP}}/\gamma)$ と $PI(\equiv \varepsilon_1 E'/cY)$ との間に存在する定量相関関係（FEA 数値解析結果）を図 8.9 に示す。また，両者の相関を次式で示す経験式（empirical equation）により定量表現することもできる；

$$a_\gamma = 1/(3.5PI); \quad PI \geq 0.286 \tag{8.32}$$

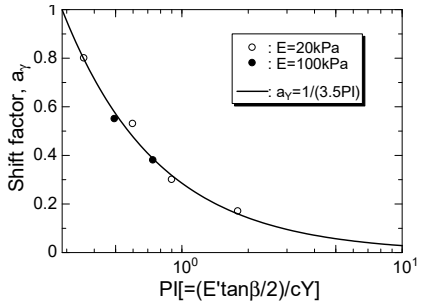


図 8.9 図 8.8 で示したマスター曲線作成に用いた移動因子 $a_\gamma(\equiv \gamma_{\mathrm{EP}}/\gamma)$ と塑性歪 $PI(\equiv \varepsilon_1 E'/cY)$ との相関（FEA 数値解析結果）。最適経験式 $a_\gamma = 1/(3.5PI)$ （(8.32)式）を実線で示す

8.3 粘弾性体

(1) 荷重緩和挙動（円錐圧子）

「弾性-粘弾性対応原理」を JKR 理論（(8.27)式）に適用することにより表面付着力を有する粘弾性体構成方程式の Laplace 空間における表記として次式を得る；

$$\bar{P}(p)=\left(\frac{E'^*(p)\tan\beta}{2}\right)\bar{A}(p)-\lambda_{\mathrm{VE}}{}^*(p)\bar{A}(p)^{3/4} \qquad (8.33)$$

(8.33)式において $\bar{P}(p)$， $\bar{A}(p)$， $E'^*(p)$， $\lambda_{\mathrm{ve}}{}^*(p)$ は，それぞれ，

$$\bar{P}(p)=\int_0^\infty P(t)e^{-pt}dt$$

$$\bar{A}(p)=\int_0^\infty A(t)e^{-pt}dt$$

$$E'^*(p)=p\int_0^\infty E_{\mathrm{relax}}'(t)e^{-pt}dt$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{VE}}{}^*(p)&=p\int_0^\infty \lambda_{\mathrm{VE}}(t)e^{-pt}dt\\&=4\sqrt{\frac{\gamma}{\pi^{1/2}}}p\int_0^\infty\sqrt{E'_{\mathrm{relax}}(t)}e^{-pt}dt\end{aligned}$$

により定義される。したがって(8.33)式の逆 Laplace 変換により，実空間における「表面付着力を有する粘弾性体の圧子力学構成方程式」は次式により表現できる（APPENDIX C 参照）；

$$\begin{aligned}P(t)=&\left(\frac{\tan\beta}{2}\right)\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dA(t')}{dt'}dt'\\&-4\sqrt{\frac{\gamma}{\pi^{1/2}}}\int_0^t\sqrt{E'_{\mathrm{relax}}(t-t')}\frac{dA(\mathrm{t}')^{3/4}}{dt'}dt'\end{aligned} \qquad (8.34)$$

圧子力学試験の一例として圧子接触面積 A_0 へのステップ圧入試験

$$A(t)=u(t)A_0 \qquad (8.35)$$

で観測される圧子荷重緩和挙動への表面付着力の影響について以下に考察を行う（(8.35)式の $u(t)$ は Heaviside ステップ関数）。(8.34)式に(8.35)式及び $du(t)/dt=\delta(t)$ （Dirac デルタ関数）の関係式を代入することにより次式が得られる;

$$P(t)=\left(\frac{\tan\beta}{2}A_0\right)E'_{\mathrm{relax}}(t) - 4\sqrt{\frac{\gamma}{\pi^{1/2}}}A_0^{3/4}\sqrt{E'_{\mathrm{relax}}(t)} \tag{8.36}$$

圧子荷重緩和への表面付着力の影響についての具体例を可視化して示すため，粘弾性モデル（Maxwell 粘弾性液体および Zener 粘弾性固体）を用いた考察結果を以下に示す。

Maxwell 粘弾性液体の緩和弾性率

$$E'_{\mathrm{relax}}(t)=E'_g\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{8.37}$$

を(8.36)式に適用して得られた緩和荷重曲線（$P(t)$ vs t）の結果を図 8.10 に示す（Vickers/Berkovich 等価円錐圧子；$\beta=19.7^{\circ}$，$\gamma=$ 0, 10, 100mJ/m^2, $E'_{\mathrm{g}}=20$ kPa, $\tau=50$ s, $A_0=0.2$ mm^2)。図 8.10 には比較のため表面付着力を有しない Maxwell 粘弾性液体の荷重緩和曲線（(8.36)式に $\gamma=0$ を代入した荷重緩和曲線）が実線で示されている。表面付着力が圧子を粘弾性体表面に引き寄せる効果により，緩和過程で圧子荷重が負の値を有する領域が出現している。また，表面付着力が存在することにより完全緩和（$P(t)\to 0$）に至るまでの時間がより長時間側にシフトしていることも分かる。

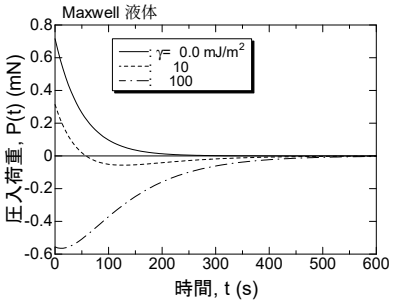


図 8.10 粘弾性液体（Maxwell 液体）の荷重緩和挙動に及ぼす表面付着力の効果（実線）。破線は付着力の存在しない Maxwell 液体の荷重緩和曲線（接触面積 $A_0=0.2$ mm^2 へのステップ圧入）

Maxwell 粘弾性液体との比較で Zener 粘弾性固体

$$E'(t)=E'_{\mathrm{e}}+\left(E'_{\mathrm{g}}-E'_{\mathrm{e}}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{8.38}$$

（$E'_g=20$ kPa, $E'_{\mathrm{e}}=5$ kPa, $\tau=50$ s）に Vickers/Berkovich 等価円錐圧子をステップ圧入（$A_0=0.2$ mm^2）した際の荷重緩和挙動を図 8.11 に示す（$\gamma=0, 10,$ および 100mJ/m^2)。実線で示した荷重緩和挙動（$\gamma=0$ mJ/m^2；表面付着力の影響を受けない粘弾性固体）との比較で，付着力 γ の増大が緩和挙動に著しい影響を与えることが理解できる。特に表面付着力 $\gamma=100$ mJ/m^2 を有する粘弾性固体（図 8.11 の一点鎖線）の荷重緩和曲線は全ての時間領域でその圧入荷重は負の領域（$P<0$）にある。図 8.10 および図 8.11 において特記すべき興味深い特徴として，荷重緩和に及ぼす表面付着力の影響が著しい場合，**負の領域における圧子荷重が時間と共に漸増しながら平衡値に至る**現象を挙げることができる。この現象は圧子圧入荷重に負の影響を及ぼす表面付着力が粘弾性流動により

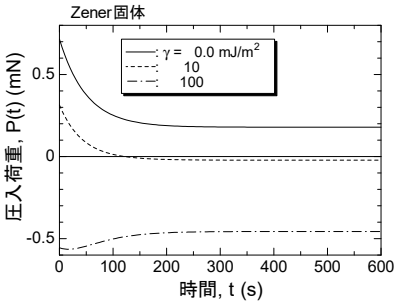


図 8.11 粘弾性固体（Zener 固体）の荷重緩和挙動に及ぼす表面付着力 γ の影響（接触面積 $A_0=0.2$ mm^2 へのステップ圧入）

緩和していく過程を反映したものである。

(8.36)式の再表現として「圧子接触面積 A_0 へのステップ付加」は次式で与えられる；

$$P_0(t)=\left(\frac{\tan\beta}{2}\right)E'(t)A_0-4\sqrt{\frac{\gamma E'(t)}{\pi^{1/2}}}A_0^{3/4} \qquad (8.36a)$$
$$=a_0E'(t)-b_0\sqrt{\gamma E'(t)}$$

ここに $E'_{\mathrm{relax}}(t)=E'(t)$ と略記し，a_0 および b_0 は，それぞれ，

$$a_0=\left(\frac{\tan\beta}{2}\right)A_0 \qquad b_0=\frac{4}{\pi^{1/4}}A_0^{3/4} \qquad (8.37a)$$

により定義される。一方，A_0 とは異なる圧子接触面積 A_1 へのステップ圧入では，上記(8.36a)式，(8.37a)式において $A_0 \Rightarrow A_1$ 置換を行うことにより

$$P_1(t)=\left(\frac{\tan\beta}{2}\right)E'(t)A_1-4\sqrt{\frac{\gamma E'(t)}{\pi^{1/2}}}A_1^{3/4} \qquad (8.36b)$$
$$=a_1E'(t)-b_1\sqrt{\gamma E'(t)}$$

$$a_1=\left(\frac{\tan\beta}{2}\right)A_1 \qquad b_1=\frac{4}{\pi^{1/4}}A_1^{3/4} \qquad (8.37b)$$

を得る。すなわち異なる圧子接触面積 A_0 および A_1 へのステップ圧子圧入を記述する粘弾性構成方程式が

$$P_0(t)=a_0E'(t)-b_0\sqrt{\gamma E'(t)} \qquad (8.36a)$$

$$P_1(t)=a_1E'(t)-b_1\sqrt{\gamma E'(t)} \qquad (8.36b)$$

により与えられる。さらに(8.36a)式および(8.36b)式からなる連立方程式の解とし最終的に

緩和弾性率：

$$E'(t)=\frac{P_0(t)}{a_0}+\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{a_1P_0(t)-a_0P_1(t)}{a_0b_1-a_1b_0} \qquad (8.38a)$$

あるいは

$$E'(t)=\frac{P_1(t)}{a_1}+\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{a_1P_0(t)-a_0P_1(t)}{a_0b_1-a_1b_0} \qquad (8.38b)$$

付着エネルギー：

$$\gamma = \frac{1}{E'(t)}\left[\frac{a_1 P_0(t) - a_0 P_1(t)}{a_0 b_1 - a_1 b_0}\right]^2 \tag{8.39}$$

を得る。したがって異なる圧子接触面積 A_0 および A_1 へのステップ圧子圧入試験で実測される圧入荷重緩和 $P_0(t)$ および $P_1(t)$ を(8.38a)式～(8.39)式に代入することにより**緩和弾性率 $E'(t)$ および付着エネルギー（付着力）γ を実測定量することが可能となる。**

(2) クリープ変形（球形圧子）

球形圧子荷重 P と接触半径 a との関係式（JKR 理論）((8.24)式参照)

$$P = \frac{4E'}{3R}a^3 - 4\sqrt{\pi\gamma E'}a^{3/2} \tag{8.40}$$

に $a^{3/2} = x$ を代入することにより(8.40)式は x を変数とする 2 次方程式

$$\frac{4E'}{3R}x^2 - 4\sqrt{\pi\gamma E'}x - P = 0 \tag{8.41}$$

に帰着し，その解として以下に示す a^3 - P 関係式を得る；

$$\begin{aligned} \frac{4a^3}{3R} &= C'P \cdot F(k) \\ F(k) &\equiv 1 + 2\left(k + \sqrt{k + k^2}\right) \end{aligned} \tag{8.42}$$

ここに

$$\begin{aligned} C' &= 1/E' \\ k &= \Gamma/P \\ \Gamma &= 3\pi R \cdot \gamma \end{aligned} \tag{8.43}$$

＊ E': 弾性率， C': コンプライアンス
Γ: 表面付着力， γ : 付着張力（付着エネルギー）
R : 球圧子半径

刺激応答力学環境として圧入荷重 P_0 へのステップ負荷 $P(t) = P_0 u(t)$ （$u(t)$:Heaviside ステップ関数）を想定したうえで，弾性-粘弾性対応原理および Laplace 変換/逆変換を(8.42)式に適用することにより，表面付着力を有する粘弾性体のクリープ変形を記述する構成式が次式により与えられる；

$$\alpha_0(t)\left(\equiv\frac{4a_0(t)^3}{3RP_0}\right)=C'(t)F(k_0) \tag{8.44a}$$

(8.44a)式において$C'(t)$はクリープ関数を表しており, 下付き添え字“0”はステップ圧入荷重P_0におけるそれぞれの物理量を意味する。したがって，P_0とは異なる圧入荷重P_1における(8.44a)式の表記は

$$\alpha_1(t)\left(\equiv\frac{4a_1(t)^3}{3RP_1}\right)=C'(t)F(k_1) \tag{8.44b}$$

により与えられる。(8.44b)式においてk_1は
$k_1(\equiv\Gamma/P_1)=(P_0/P_1)k_0=rk_0$により$k_0$に関係づけられる(異なる圧入荷重の比を$r(=P_0/P_1)$で表記)。(8.44a)式および(8.44b)式の比によりクリープ関数$C'(t)$を消去し最終的に次式を得る；

$$F(x)=1+2\left(x+\sqrt{x+x^2}\right)=\frac{\alpha_0(t)}{\alpha_1(t)}\left\{1+2\left(rx+\sqrt{rx+(rx)^2}\right)\right\} \tag{8.45}$$

(8.45)式の数値解として得られる$x=k_0(=\Gamma/P_0)$より表面付着力$\Gamma(=3\pi R\cdot\gamma)$あるいは付着エネルギー（付着張力）$\gamma$を, また(8.45)式で求めた$F(k_0)$を(8.44a)式に代入して得られる

$$C'(t)=\frac{\alpha_0(t)}{F(k_0)} \tag{8.46}$$

からクリープ関数$C'(t)$を, それぞれ, **実験的に定量評価することができる**（第 12 章参照)。

【Zener 粘弾性固体を用いたクリープ解析】

Zener 粘弾性固体を例に表面付着力がそのクリープ変形挙動に及ぼす効果を考察する。

Zener 粘弾性固体のクリープ関数$C'(t)$は次式により与えられる;

$$C'(t)=C'_{\mathrm{e}}+\left(C'_{\mathrm{g}}-C'_{\mathrm{e}}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{8.47}$$

ここにC'_{g}, C'_{e}およびτは, それぞれ, ガラスコンプライアンス, 平衡コンプライアンスおよび遅延時間を意味する。

表面付着力の存在しない，すなわち$\Gamma=0$あるいは$k=0$となる

粘弾性体の場合, (8.46)式に $F(k_0)=1$ を代入することにより球圧子接触半径に見られるクリープ変形は次式で表現できる；

$$a^3(t)=\frac{3R}{4}C'(t)\cdot P \tag{8.48}$$

すなわち $a^3(t)\propto P$ の関係が存在しクリープ変形 $a^3(t)$ はクリープ関数 $C(t)$ を介して付加するステップ圧入荷重 P に比例する（表 7.2 参照）。一方，有限の付着力を有する粘弾性体においては(8.44)式が示すようにこの比例関係は成立しない。さらに表面付着力が十分に大きな，あるいは圧入荷重が限りなくゼロに近い球圧子圧入試験($P\downarrow 0$)では $F(k)\to 4k$ なる関係を(8.44)式に代入することにより次式が得られる;

$$a^3(t)=3RC'(t)\cdot\Gamma \tag{8.49}$$

すなわち外部負荷の存在しない**表面付着力単独下でクリープ変形 $a^3(t)$ が誘起される**。換言すると, 球圧子が粘弾性体表面に接触し, かつ $P\equiv 0$ なる死荷重下においても表面付着力 Γ によりクリープ変形が誘起される。

クリープ変形 $a^3(t)$ に及ぼす表面付着力 γ の影響を図 8.12 および図 8.13 に示す。これらの図より以下の重要な結論を得る;

(1) 圧入荷重が同一であっても表面付着力 γ の増大と共にクリープ変形が助長される

(2) $a^3(t)$ -クリープは線形粘弾性体であっても付加したステップ荷重 P に比例せず，しかも $P\equiv 0$ なる死荷重下においても表面付着力によりクリープ変形が誘起される

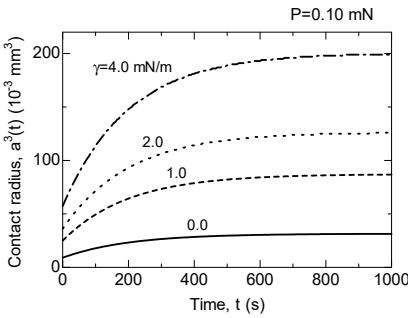


図 8.12 ステップ荷重付加（球形圧子；半径 R=3.0m, P=0.10mN）により誘起されるクリープ変形 $a^3(t)$ (Zener モデル)：曲線は下から上に γ =0.0, 1.0, 2.0, 4.0mN/m

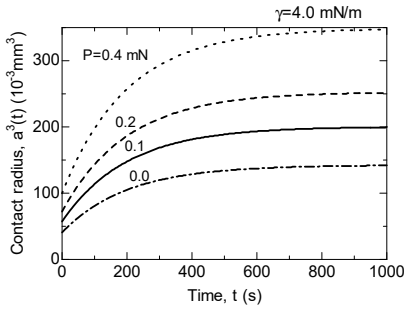


図 8.13 ステップ荷重付加（球形圧子；半径 R=3.0mm）により誘起されるクリープ変形 $a^3(t)$ (Zener モデル; γ =4.0mN/m)。曲線は下から上にステップ負荷荷重 P=0.0, 0.1, 0.2, 0.4mN

9 被膜／基材積層複合材の圧子力学

日本古来の伝統工芸でもある漆器を始め，釉を施した陶磁器や鍍金製品等々，表面に被膜(film, coating)を施した多くの品々が我々の日常生活を豊かなものとしてくれている。塗装を施した外壁材や各種の粘着テープ等々も被膜／基材複合材に分類される。これら被膜材(皮膜)は基材(substrate)の保護のみならず，触感を高めたり，粘着テープのように皮膜そのものの機能を有効に使うよう工夫が施されている。これら多くの積層複合材において皮膜の厚さは，一般的に言って，ナノメートルからサブミリメーターの範囲にある。このため，これら皮膜そのものの特性(film-only properties)や，その経年劣化の定量的評価には多くの技術的障壁・課題が山積している。

一方，前章までのミクロ・ナノ領域に適用可能な圧子力学に関する考察から容易に推察できるように，圧子力学の科学と計測技術はこれら被膜／基材複合材(film/substrate composite)の各種力学物性の評価と解析に極めて優れた手法を提供する。本章では未だ発展途上にある「被膜／基材積層複合材の圧子力学」に関する理論構築を行う**[9.1-9.5]**。被膜および基材の各種物性評価に関する圧子力学実験手法・解析は第 12 章で詳述される。

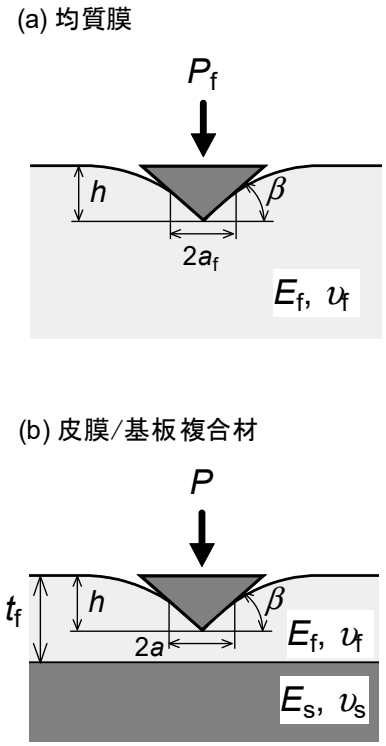


図 9.1 積層複合材への円錐圧子圧入に伴う変形およびこれを記述する圧子力学パラメータ

9.1 弾性積層複合材の圧子力学挙動

皮膜および基板･基材共に完全弾性体である複合材については，厳密な圧子力学理論が構築されている。図 9.1 に円錐圧子の弾性圧入を例にとり，(a)基材の影響を受けない皮膜のみ，すなわち，半無限に広がる均質膜材，および(b)厚さ t_f の膜が半無限に広がる基材に被覆された積層複合材の圧子圧入に伴う変形の様子を示す。膜および基材の弾性率およびポアソン比を，それぞれ，(E_f，ν_f)，(E_s，ν_s)で表し，一定の深さ h まで圧子を圧入する際に要する圧入荷重を，それぞれ，P_f および P，圧子接触半径を a_f および a で表現する。圧入深さ h に比して膜厚が十分に大きい，すなわち，$t_f >> h$ の場合には，基板・基材の影響を無視できるため，その圧入挙動は第 3 章で詳述した半無限均質材料(homogeneous body)の弾性圧子力学に帰着される。したがって，その圧入挙動は (3.33)式，(3.34)式により

$$P_f = k_h E_f' h^n \tag{9.1}$$

[9.1] C.H. Hsueh, P. Miranda, *J. Mater. Res.*, **19[1]**, 94 (2004)
[9.2] C.H. Hsueh, P. Miranda, *J. Mater. Res.*, **19[9]**, 2774 (2004)
[9.3] H.Y. Yu, S.C. Sanday, B.B. Rath, *J. Mech. Phys. Solids,* **38[6]**, 745 (1990)
[9.4] F. Yang, *Mater. Sci. Eng.*, **A358**, 226 (2003)
[9.5] M. Sakai, *J. Mater. Res.*, **24[3]**, 831 (2009)

$$a_{\mathrm{f}}\left(\equiv a_{\mathrm{H}}\right)=Bh^{n-1}$$
$$=CP^{(n-1)/n} \tag{9.2}$$

で与えられる(表 3.1 参照)。(9.2)式で定義した a_{H} (添え字 H は homogeneous を意味する)は任意弾性率を有する半無限均質等方弾性体に深さ h まで圧子を圧入した際に生じる圧子接触半径(indentation contact radius)を表しており，係数 B が弾性率に依存しない事実(表 3.1 参照)から容易に分かるように, 任意の弾性率を有する弾性皮膜について, その a_{f} は材質に依存することなく常に a_{H} で表現することができる。

一方, $t_{\mathrm{f}} \approx h$ そして $t_{\mathrm{f}} < h$ となる場合には, 図 9.2 に示すように, 圧入挙動に著しい基板・基材効果が表れてくる。図 9.2 には基板・基材の弾性率が膜材の弾性率に比較して十分に大きい，すなわち $E_{\mathrm{f}} << E_{\mathrm{s}}$ の場合を例に, 基材効果を定性的に図示したものである。基材効果を考察するにあたって,「半無限均質膜材」と「積層複合材(laminated composite; laminate)」に, それぞれ圧子を圧入する際,「圧入深さ h を一定」とした場合と,「圧入荷重 P を一定」とした場合とで，それぞれの圧子力学挙動に大きな相違の生じることに留意する必要がある。具体的には，図 9.2(a)に示すように，圧入深さ h 一定で観測される両者の荷重比 $\left(P/P_{\mathrm{f}}\right)_h$ あるいは接触半径比 $\left(a/a_{\mathrm{f}}\right)_h\left[\equiv\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_h\right]$ と，図 9.2(b)に示すように，圧入荷重 P 一定で観測される両者の圧入深さ比 $\left(h/h_{\mathrm{f}}\right)_P$ あるいは接触半径比 $\left(a/a_{\mathrm{f}}\right)_P\left[\equiv\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_P\right]$ に及ぼす基材効果の本質的な相違を良く認識しておくことが，積層複合材の圧子力学を理解する上でとても重要となる。例えば図 9.2 から定性的に理解できるように，接触半径に及ぼす基材効果のため，$\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_h \neq \left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_P$ となることに留意しておきたい。

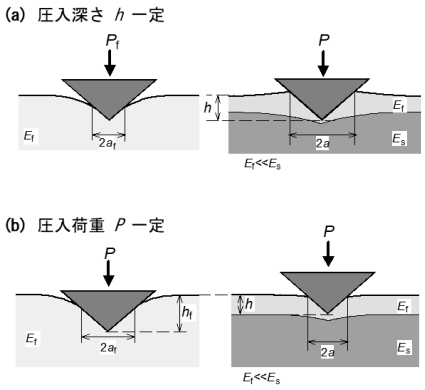


図 9.2 基材の弾性率が皮膜の弾性率に比して十分に大きな場合，すなわち，$E_{\mathrm{f}} << E_{\mathrm{s}}$ の場合を例に，(a)圧入深さ一定，(b)圧入荷重一定での圧入挙動に及ぼす基板・基材効果を定性的に示す

均質等方半無限平面に対する弾性圧子力学表現式，(9.1)式，に基材の影響を組み入れた，「有効弾性率(effective elastic modulus)」$E'_{\mathrm{eff}}\left(t_{\mathrm{f}}/a\right)$ の概念を新たに導入し，基材効果を受ける弾性積層複合材の圧子圧入時の力学応答を，現象論的に，次式で記述する;

$$P=k_h E'_{\mathrm{eff}}\left(t_{\mathrm{f}}/a\right)h^n \tag{9.3}$$

上式で $E'_{\mathrm{eff}}\left(t_{\mathrm{f}}/a\right)$ は

$$\lim_{t_{\mathrm{f}}/a\to\infty} E'_{\mathrm{eff}}\left(t_{\mathrm{f}}/a\right)=E'_{\mathrm{f}}$$

$$\lim_{t_f/a\to 0} E'_{\mathrm{eff}}\left(t_f/a\right) = E'_s$$

を満たす積層複合材の有効弾性率である。したがって，(9.1)式および(9.3)式より，相対圧入荷重 $\left(P/P_f\right)_h$ および相対圧入深さ $\left(h/h_f\right)_P$ は有効弾性率を用い，それぞれ，次式で表現できる；

$$\left(P/P_f\right)_h = E'_{\mathrm{eff}}/E'_f \tag{9.4}$$

$$\left(h/h_f\right)_P = 1\Big/\left(E'_{\mathrm{eff}}/E_f\right)^{1/n} \tag{9.5}$$

次のステップとして，Boussinesq の Green 関数を用い，(9.3)式で定義した有効弾性率 $E_{\mathrm{eff}}'\left(t_f/a\right)$ の解析的な表現式の導出を行う。弾性率 E，ポアソン比 ν により与えられる半無限弾性平面上に点荷重 P を付加した際に生じる接触点の圧入方向変位勾配(z 方向歪) $\partial u_z/\partial z$ は平端円柱圧子半径 a_0 の $a_0 \to 0$ への極限における圧入問題(第 3.1 節参照)として取り扱うことができ，歴史的には Boussinesq (1885)により，その厳密解が与えられている**[1.1, 9.6]**；

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{P\left(1+\nu\right)}{2\pi E}\left[\frac{3r^2 z}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}} - \left(3-2\nu\right)\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\right] \tag{9.6}$$

したがって(9.6)式の両片を積分することにより，図 9.3 に示す，点荷重 P を受ける膜・基材積層複合材の自由表面($z=0$)での圧入方向変位量 $u_z(r,z=0)$ は，

$$\begin{aligned} u_z(r,z=0)\left(\equiv G\left(r,z;E_i,\nu_i\right)\right) &= \int_{\infty}^{t_f} \left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_s dz + \int_{t_f}^{0} \left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_f dz \\ &= \frac{P\left(1-\nu_f^{\,2}\right)}{\pi E_f}\frac{1}{r} \\ &\quad + \frac{P}{2\pi}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1+\nu_s}{E_s}\left[\dfrac{\left(3-2\nu_s\right)}{\left(r^2+t_f^{\,2}\right)^{1/2}} - \dfrac{r^2}{\left(r^2+t_f^{\,2}\right)^{3/2}}\right] \\ -\dfrac{1+\nu_f}{E_f}\left[\dfrac{\left(3-2\nu_f\right)}{\left(r^2+t_f^{\,2}\right)^{1/2}} - \dfrac{r^2}{\left(r^2+t_f^{\,2}\right)^{3/2}}\right] \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{9.7}$$

で表現される**[9.1, 9.2]**。(9.7)式は集中点荷重(point load)を受ける積層複合材の Boussinesq Green 関数 $G\left(r,z;E_i,\nu_i\right)$ と呼ばれるもので

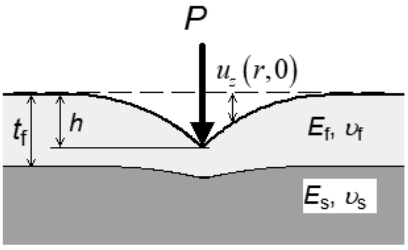


図 9.3 集中点荷重を受ける膜・基材積層複合材における Boussinesq 問題

[9.6] J. Boussinesq, “Application des potentials á l’etude de l’équilibre et du mouvement des solides élastiques”, Gauthier-Villars (1885)

あり，以下に示すように円錐圧子や球圧子のような汎用圧子の P -h 圧入挙動を定量的に記述する基礎式となる。

第 3 章(図 3.5，表 3.1 参照)で考察した汎用圧子の接触面における接触圧力分布 $p(r)\left(\equiv -\sigma_z(r,0)\right)$ ($r \le a$; 接触半径 a)と上述の Boussinesq Green 関数 $G\left(r,z;E_i,\nu_i\right)$ (<u>単位圧入荷重</u>を用いて表現した(9.7)式)を用いることにより，圧入方向(z 軸方向)変位 $u_z(r,z=0)\left(\equiv G\left(r,z;E_i,\nu_i\right)\right)$ の積算として軸対称圧子に対する積層複合材料の圧子圧入深さ h を接触圧力分布 $p(r)$ の関数として次式により記述することができる；

$$h=\int_0^a p(r)G\left(r,z;E_i,\nu_i\right)2\pi r dr \tag{9.8}$$

したがって(9.7)式を(9.8)式に代入し，さらに(9.4)式を利用することにより，膜物性($E'_{\mathrm{f}},\nu_{\mathrm{f}}$)および基材物性($E'_{\mathrm{s}},\nu_{\mathrm{s}}$)を用い，無次元膜厚 $\xi\,(=t_{\mathrm{f}}/a)$ の関数として表現した有効弾性率 $E_{\mathrm{eff}}'\left(t_{\mathrm{f}}/a\right)$ を最終的に次式で表現することができる；

$$\frac{E'_{\mathrm{eff}}}{E'_{\mathrm{f}}}\left[\equiv\left(\frac{P}{P_{\mathrm{f}}}\right)_h\right]=\left[1+\frac{E'_{\mathrm{f}}}{2I_0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+\nu_{\mathrm{s}}}{E_{\mathrm{s}}}\left[\left(3-2\nu_{\mathrm{s}}\right)I_1\left(\xi\right)-I_2\left(\xi\right)\right]\\ \quad -\dfrac{1+\nu_{\mathrm{f}}}{E_{\mathrm{f}}}\left\{\left(3-2\nu_{\mathrm{f}}\right)I_1\left(\xi\right)-I_2\left(\xi\right)\right\}\end{array}\right\}\right]^{-1} \tag{9.9}$$

(9.9)式において， I_0， $I_1\left(\xi\right)$ ，および $I_2\left(\xi\right)$ は無次元接触圧力分 $p_{\mathrm{N}}(\rho)$ ：

$$p(r)=p_m\cdot p_{\mathrm{N}}\left(\rho\right);$$
$$p_m=P/\pi a^2;\quad \rho=r/a$$

を用いることにより次式で与えられる；

$$\begin{aligned}I_0&=\int_0^1 p_{\mathrm{N}}\left(\rho\right)d\rho\\ I_1\left(\xi\right)&=\int_0^1 p_{\mathrm{N}}\left(\rho\right)\frac{\rho}{\left(\rho^2+\xi^2\right)^{1/2}}d\rho\\ I_2\left(\xi\right)&=\int_0^1 p_{\mathrm{N}}\left(\rho\right)\frac{\rho^3}{\left(\rho^2+\xi^2\right)^{3/2}}d\rho\end{aligned} \tag{9.10}$$

ここに$\xi(\equiv t_{\mathrm{f}}/a)$は接触半径$a$により規格化された無次元膜厚を意味する。皮膜が十分に厚い，すなわち，$t_{\mathrm{f}} >> a(\xi \uparrow \infty)$の場合，$I_1(\xi)=0=I_2(\xi)$となるため，(9.9)式は$E'_{\mathrm{eff}}=E'_{\mathrm{f}}$となり，皮膜が圧入挙動を支配するようになる。一方，皮膜が十分に薄い，すなわち，$t_{\mathrm{f}} << a(\xi \downarrow 0)$の場合には，$I_1(\xi)=I_2(\xi)=I_0$の関係が成立するために，(9.9)式は$E'_{\mathrm{eff}}=E'_{\mathrm{s}}$となり，圧入挙動は基材物性により支配される。慣用圧子形状(平端円柱圧子，球圧子，円錐圧子)における$p_{\mathrm{N}}(\rho)$，$I_1(\xi)$，および$I_2(\xi)$の解析表現式を表 9.1 および表 9.2 に纏めて示しておく。

(9.10)式の積分を実行するに当たって，基材効果を受ける積層複合材の圧子接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$の情報が必要となるが，これについての一般的な解析解は現在までのところ報告されていない。したがって表 9.1 には圧子接触圧力$p_{\mathrm{N}}(\rho)$として基材効果を無視した均質等方半無限平面における軸対称圧子の接触圧力分布(第 3 章，表 3.1 参照)を用いて求めた$I_1(\xi)$および$I_2(\xi)$の解析表現が示されている(積分I_0については(9.10)式より$I_0=I_1(0)=I_2(0)$の関係が存在するため，表 9.1 において$I_1(\xi)$あるいは$I_2(\xi)$に$\xi=0$を代入することにより与えられる)。一方，表 9.2 には圧入挙動に基材効果が著しく反映されると考えられる剛体(すなわち，$E'_{\mathrm{s}}\uparrow\infty$)を基材とし，その表面に弾性薄膜($t_{\mathrm{f}}/a<<1$)を被覆した積層複合材の圧子接触表面に誘起される接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$ **[9.4]**，および，これを用いて求めた$I_1(\xi)$および$I_2(\xi)$の解析解が示されている。また，図 9.4 には，それぞれの力学環境(実線：基材効果を無視した均質等方半無限平面，破線：弾性薄膜/剛基材積層複合材)における接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$の相違をグラフ化して示す。

上述の Boussinesq Green 関数$G(r,z;E_i,\nu_i)$を用いた積層複合材の弾性圧子力学理論は解析解を求めることのできる長所に加え，第 9.2 節で述べる粘弾性論への拡張が容易となる利点もある。一方，先に述べたように，基板・基材の影響下にある圧子接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$に関する厳密解が求められていないため，解析結果に厳密性を欠く難点が存在する。

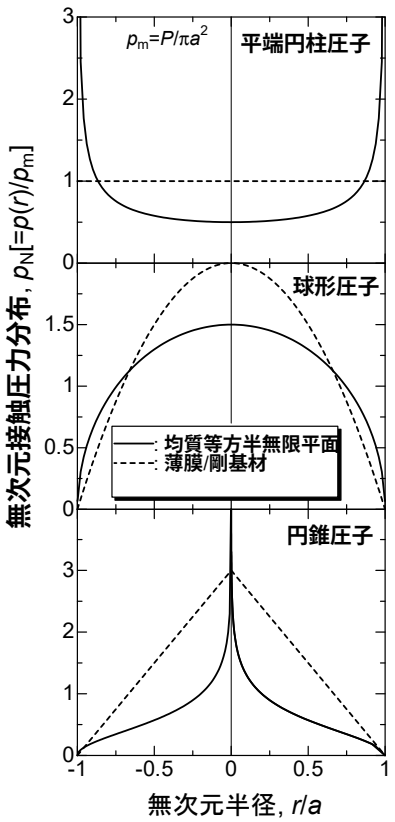


図 9.4 軸対称圧子接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$への基材効果：
実線：均質等方半無限平面
破線：弾性薄膜/剛基材積層複合材

一方，以下に示す Fredholm 積分方程式(Fredholm integral equation)を用いると,「数値解」として積層複合材の弾性圧子力学に関する「厳密解」を求めることができる**[9.3]**。薄膜，基材それぞれについて，2 種類の固有調和関数(Papkovich-Neuber 関数)を用いて被膜および基材それぞれの層における応力と歪を表現し，これらに第 3 章と同様の Hankel 積分変換を適用することにより, 最終的に次式で示す関数 $H(\rho)$ に関する第 2 種 Fredholm 積分方程式を得る；

$$H(\rho)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[K\left(y+\rho\right)+K\left(y-\rho\right)\right]H(y)dy=F(\rho) \qquad (9.11)$$

ここに，$H(\rho)$ は圧子の接触圧力分布を記述する無次元関数を意味している。(9.11)式の積分核 $K\left(y\right)$ は皮膜および基材の弾性率 (E_{f}，ν_{f})，(E_{s}，ν_{s})および無次元膜厚 $\xi\,(=t_{\mathrm{f}}/a)$ の情報を含む特性関数, $F(\rho)$ は注目している軸対称圧子の形状に関する情報を含む特性関数であり,

$F(\rho)=1$ ；　　平端円柱圧子

$F(\rho)=1-\left(\gamma\rho\right)^2$ ；　　球形圧子

$F(\rho)=1-\gamma\rho$ ；　　円錐圧子

で与えられる。ここに $\gamma=\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_h$ は図 9.2(a)に示した圧入深さ h での接触半径比($\equiv\left(a/a_{\mathrm{f}}\right)_h$)を意味する。また，(9.11)式の積分方程式の解である $H(\rho)$ は次式により圧入荷重に関係付けられる；

$$\left(\frac{P}{P_{\mathrm{f}}}\right)_h=c\int_0^1 H\left(\rho\right)d\rho \qquad (9.12)$$

上式で圧子形状に依存する係数 c は平端円柱圧子，球形圧子，円錐圧子について，それぞれ，c=1，3/2，および 2 により与えられる。(9.11)式は，積層複合材の力学物性を圧子力学的に定量評価する上で重要となるパラメータ，$\gamma=\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_h$ および $H(\rho)$ すなわち $\left(P/P_{\mathrm{f}}\right)_h$，を未知数とした積分方程式である。この積分方程式の解 $H(\rho)$ を求めるに当たって，先ず関数 $H(\rho)$ を Chebyshev 級数で近似表現することにより(9.11)式の積分方程式を線形連立代数方程式に書き換える。さらに，$\gamma=1$ を初期値とする $F(\rho)$ を上述の連立代数方程式に代入し, 零次解としての $H(\rho)$ を決定する。引き続き

γの値を変化させながら，同様の演算操作を繰り返し行い，境界条件である$H(1)=0$ (圧子接触領域の外側($\rho \geq 1$)で接触応力が零)が得られるまで，この反復操作を行うことにより最終解としての$H(\rho)$を決定する。このようにして求めた$H(\rho)$を(9.12)式に代入し求めた$(P/P_{\mathrm{f}})_h[\equiv E'_{\mathrm{eff}}/E'_{\mathrm{f}}]$と無次元膜厚$t_{\mathrm{f}}/a$との関係を，基材と皮膜の弾性率比$E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}$をパラメータとして，図 9.5 に示す。図 9.5 には，比較のため，先に導出した Boussinesq Green 関数を用いた解析解((9.9)式)が実線で示されている。これらの実線は均質等方半無限平面における接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$ (表 9.1，図 9.4 参照)を仮定して求めた解析解である。ただし，図 9.5 において，基材の弾性率が皮膜のそれに比較して十分に大きな$E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}=100$に対応する実線のみは，基材を剛体(rigid body)と仮定した接触圧力分布$p_{\mathrm{N}}(\rho)$ (表 9.2, 図 9.4 参照)を(9.9)式に代入して求めた解析解である。これらの解析解(実線)は第 2 種 Fredholm 積分方程式((9.11)式)を用いて求めた厳密解を比較的忠実に再現していることが分かる。特に，球形圧子においては，これら両者の一致は極めて良いことが分かる。十分に大きな圧入，あるいは皮膜が十分に薄い場合，すなわち，$t_{\mathrm{f}}/a<0.1$の領域で有効弾性率は$E'_{\mathrm{eff}} \to E'_{\mathrm{s}}$に収束し，逆に，微小圧入量あるいは厚膜の力学環境($t_{\mathrm{f}}/a>50$)では$E'_{\mathrm{eff}} \to E'_{\mathrm{f}}$へと収束することが分かる。一方，(9.5)式で記述したように圧入荷重P一定での無次元圧入深さ，$(h/h_{\mathrm{f}})_P$，は$1/(E'_{\mathrm{eff}}/E'_{\mathrm{f}})^{1/n}$で表現できるため，上述の$E'_{\mathrm{eff}}/E'_{\mathrm{f}}$に関する解析解あるいは数値解を利用することにより，容易に，$(h/h_{\mathrm{f}})_P$を求めることができる。

均質等方弾性体においては，第 3 章で詳述したように，圧子周辺の自由表面は圧子の圧入に引きずられるように沈み込む，いわゆる，シンクイン(sink-in)が観測される。その結果，均質等方半無限弾性体においては，表 3.1 に示したようにh_{c}/hは圧子の形状に関わらず常に 1 以下の値を取る。一方，本章で述べる積層複合材においては，皮膜と基材との弾性率，すなわち，皮膜と基材での弾性変形能に応じてシンクインの程度が影響を受ける。本節で述べた無次元接触半径$\gamma\left[\equiv(a/a_{\mathrm{H}})_h\right]$と皮膜・基材の弾性率比$E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}$

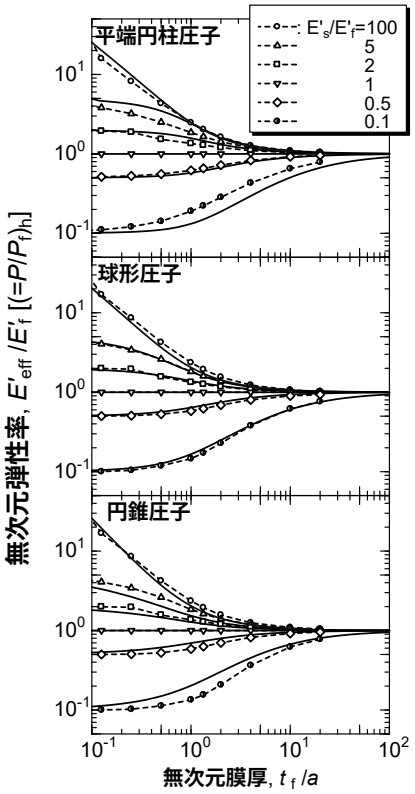


図 9.5 積層複合材料における無次元弾性率と無次元皮膜厚さとの関係。破線を伴う各種のシンボルは Fredholm 積分方程式((9.11)式)に基づく厳密数値解，実線は Boussinesq Green 関数を用いた近似解析解((9.9)式)

の関係を用い，積層複合材におけるシンクイン・パイルアップ(sink-in/pile-up)現象について以下，考察を加える。圧入深さ一定での無次元接触半径 $\gamma\left[\equiv\left(a/a_{\mathrm{H}}\right)_h\right]$ への基材効果は，先にも述べたように，第 2 種 Fredholm 積分方程式((9.11)式)に反復法(iteration method)を適用することにより，数値解として求めることができる。汎用性の高い球形圧子および円錐圧子について算出した無次元接触半径 $\left(a/a_{\mathrm{f}}\right)_h$ と無次元膜厚 t_{f}/a との関係を図 9.6 にグラフ化して示す**[9.3]**。

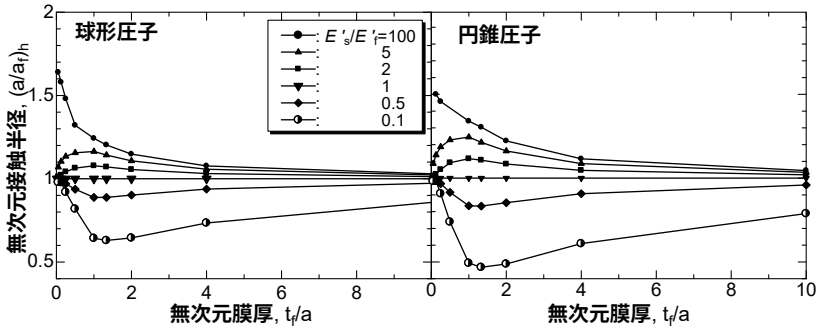


図 9.6 圧入深さ一定での無次元接触半径 $\gamma\left[\equiv\left(a/a_{\mathrm{f}}\right)_h\right]$ に及ぼす基材効果(Fredholm 積分方程式の数値解)

図 9.6 が示すように基材の弾性率が皮膜の弾性率に比べて大きな場合(すなわち，$E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}>1$)，$t_{\mathrm{f}}/a\approx1$ の近辺で $\left(a/a_{\mathrm{f}}\right)_h$ vs. t_{f}/a の関係が「上に突」の曲線となり，逆に，基材の弾性率が皮膜の弾性率より小さな場合(すなわち，$E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}<1$)には「下に突」の曲線となる。換言すると，前者では基材の弾性率が大きく，その変形抵抗性が高いため，圧子圧入による変形が皮膜に集中し，この結果，同一圧入深さ h で比較した場合，均質等方半無限弾性体の表面変形に比べて，積層複合材では圧子周辺の自由表面のシンクインが抑制される，あるいはパイルアップが誘起されることを意味している。一方，基材の弾性率が皮膜の弾性率より小さな積層複合材では，圧入に伴う変形の多くを基材が担うため，均質等方半無限弾性体に比して，同一圧入深さ h での圧子周辺自由表面が沈み込む，「シンクイン(sink-in)」現象がより顕著に表れる。円錐圧子を例にとると，均質等方弾性体の h_{c}/h が $2/\pi$ により表現

出来るので（(3.28)式，表 3.1 参照），積層複合材のシンクインの程度を表す h_c/h は最終的に次式により表される；

$$\frac{h_c}{h}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{a_H}\right)_h$$

したがって図 9.6 を参照することにより，$t_f/a\approx 1$ まで円錐圧子を圧入した場合，$E'_s/E'_f=5$ の積層複合材の h_c/h は $h_c/h\approx(2/\pi)\times 1.28\approx 1.0$ となり，シンクインがほとんど生じなくなることが分かる。さらに，基材の弾性率がより大きく剛体と近似できる複合材($E'_s/E'_f=100$；図 9.6 参照)では，$h_c/h>1$ となり，弾性体であるにもかかわらず，均質等方延性材料に類似した自由表面の盛り上がり(パイルアップ現象)が観測される(第 5 章，図 5.6，図 5.7 参照)。一方，基材の弾性変形能が皮膜のそれに比して大きな，例えば，$E'_s/E'_f=0.1$ の積層複合材に $t_f/a\approx 1$ まで円錐圧子を圧入した場合，図 9.6 より $(a/a_H)_h\approx 0.5$，したがって $h_c/h\approx(2/\pi)\times 0.5\approx 0.3$ となり，圧入変位の多くの部分を基材が担うために均質等方弾性体で観察される $h_c/h=2/\pi(=0.637)$ よりも顕著なシンクイン現象が生じる。

表 9.1　均質等方半無限平面における軸対称圧子の接触圧力分布 $p_{\mathrm{N}}(\rho)$，および，これを用いて求めた $I_1(\xi)$，$I_2(\xi)$ の解析表現

	$p_{\mathrm{N}}(r,a)$	$I_1(\xi)$	$I_2(\xi)$
平端 円柱圧子	$\dfrac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)\right]$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)-\dfrac{\xi}{1+\xi^2}\right]$
球形圧子	$\dfrac{3}{2}\sqrt{1-\rho^2}$	$\dfrac{3}{2}\left[(1+\xi^2)\left\{\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)\right\}-\xi\right]$	$\dfrac{3}{2}\left[(1+3\xi^2)\left\{\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)\right\}-3\xi\right]$
円錐圧子	$\cosh^{-1}\rho$	$\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\xi+\dfrac{\xi}{2}\ln\dfrac{\xi^2}{1+\xi^2}$	$\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\xi+\xi\ln\dfrac{\xi^2}{1+\xi^2}$

表 9.2　弾性薄膜($t_{\mathrm{f}}/a \ll 1$)を被覆した積層複合材の圧子接触圧力分布 $p_{\mathrm{N}}(\rho)$，および，これを用いて求めた $I_1(\xi)$，$I_2(\xi)$ の解析解

	$p_{\mathrm{N}}(r,a)$	$I_1(\xi)$	$I_2(\xi)$
平端 円柱圧子	1	$\sqrt{1+\xi^2}-\xi$	$2(\sqrt{1+\xi^2}-\xi)-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$
球形圧子	$2(1-\rho^2)$	$2[(2/3)(1+\xi^2)\sqrt{1+\xi^2}$ $-\xi-(2/3)\xi^3]$	$4[(1/3)(1+4\xi^2)\sqrt{1+\xi^2}$ $-\xi-(4/3)\xi^3]$
円錐圧子	$3(1-\rho)$	$3[(1/2)\sqrt{1+\xi^2}-\xi$ $-(1/2)\xi^2\ln\left\{\xi/(1+\sqrt{1+\xi^2})\right\}]$	$3[(1/2)\sqrt{1+\xi^2}-2\xi$ $-(3/2)\xi^2\ln\left\{\xi/(1+\sqrt{1+\xi^2})\right\}]$

9.2 粘弾性積層複合材の圧子力学挙動

線形粘弾性体構成方程式の Laplace 空間における表記が，実空間における完全弾性体の構成方程式と形式的に等価となる「弾性-粘弾性対応原理」(第 7 章)に基づき，第 9.1 節で展開した積層複合材料の弾性圧子力学理論を粘弾性力学応答の定量記述へと拡張することができる**[9.7]**。

接触面積 A_0 へのステップ圧入，$A(t)=A_0\cdot u(t)$，で観察される粘弾性積層複合材の円錐圧子圧入荷重緩和は，(7.6)式と同様に次式で表現できる；

$$P(t)=\frac{\tan\beta}{2}A_0\cdot E'_{\mathrm{relax}}(t) \tag{9.13}$$

本節では以降，積層複合材の緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を簡潔に $E'(t)$ と表記する。「弾性-粘弾性対応原理」を(9.9)式に適用することにより，接触面積 A_0 へのステップ圧入，$A(t)=A_0\cdot u(t)$ で観察される積層複合材料の緩和弾性率 $E'(t)\left(\equiv E'_{\mathrm{eff}}(t)\right)$ を次式により記述することができる；

$$\frac{E'(t)}{E'_{\mathrm{f}}(t)}\left[\equiv\left(\frac{P(t)}{P_{\mathrm{f}}(t)}\right)_A\right]=\left[1+\frac{E'_{\mathrm{f}}(t)}{2I_0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+\nu_{\mathrm{s}}}{E_{\mathrm{s}}(t)}\left[\left(3-2\nu_{\mathrm{s}}\right)I_1\left(\xi\right)-I_2\left(\xi\right)\right]\\ \quad-\dfrac{1+\nu_{\mathrm{f}}}{E_{\mathrm{f}}(t)}\left\{\left(3-2\nu_{\mathrm{f}}\right)I_1\left(\xi\right)-I_2\left(\xi\right)\right\}\end{array}\right\}\right]^{-1} \tag{9.14}$$

上式において皮膜緩和弾性率を $E_{\mathrm{f}}(t)$，$E'_{\mathrm{f}}(t)\left[\equiv E_{\mathrm{f}}(t)/\left(1-\nu_{\mathrm{f}}^2\right)\right]$，基材緩和弾性率を $E_{\mathrm{s}}(t)$，$E'_{\mathrm{s}}(t)\left[\equiv E_{\mathrm{s}}(t)/\left(1-\nu_{\mathrm{s}}^2\right)\right]$ により表記する。接触面積 A_0 へのステップ圧入を想定しているため，無次元膜厚 $\xi\left(\equiv t_{\mathrm{f}}/a_0\right)$ ($a_0=\sqrt{A_0/\pi}$)は時間に依存しない定数で与えられる。第 6.4 節で示したように粘弾性体のポアソン比 ν は時間依存性を示し，粘弾性液体(例えば Zener II モデル(6.8b)式で $E_{\mathrm{e}}=0$)では，応力緩和初期のポアソン比 $\nu(0)\,(\approx 0.1)$ は緩和の過程で $\nu(\infty)\uparrow 0.5$ へと緩やかに増大する(図 6.10 参照)。一方，粘弾性「固体」($E_{\mathrm{e}}\neq 0$)の場合にはポアソン比の時間依存性は小さい。本節では，簡潔のために，(9.14)において，$\nu_{\mathrm{f}}=\nu_{\mathrm{s}}=0.3$ と仮定し，さらに緩和過程において，これらポアッソン比は時間に依存しない一定値を取るとの仮定に則って解析を進める。この仮定は粘弾性圧子力学応答の本質に何ら影響を与えるものではない。

(9.14)式中の緩和弾性率 $E_{\mathrm{f}}(t)$ および $E_{\mathrm{s}}(t)$ を記述する構成方程

[9.7] M. Sakai, *Phil. Mag.*, **86[33-35]**, 5607(2006)

式には第 6 章で詳述した単一緩和時間を有する Zener II モデル(図 6.2 参照)の緩和弾性率((6.8b)式参照)

$$E'(t) = E'_{\mathrm{e}} + \left(E'_{\mathrm{g}} - E'_{\mathrm{e}}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \qquad (9.15)$$
$$E'_{\mathrm{g}} = E'_{\mathrm{e}} + E'_{\mathrm{M}}$$

を用いて具体的な数値解析を進める。上式において緩和時間は $\tau = \eta / E'_{\mathrm{M}}$ で与えられる。粘弾性液体($E_{\mathrm{e}} = 0$)の場合，Zener II モデルは Maxwell モデルに帰着される。

以下，円錐圧子の接触面積 A_0 へのステップ圧入，$A(t) = A_0 \cdot u(t)$ (接触半径を用いた表現では $a(t) = a_0 \cdot u(t)$； $a_0 = \sqrt{A_0/\pi}$)，を想定し積層複合材の粘弾性圧子力学挙動についての考察を行う。

(1) 弾性皮膜/粘弾性基材積層材の応力緩和挙動

粘弾性基材に弾性膜を被覆した積層材に円錐圧子をステップ圧入した際に観測される荷重緩和 $P(t)$ は(9.13)式が示すように，緩和弾性率 $E'(t)$ により直接記述ができる。弾性膜の弾性率と粘弾性基材の初期弾性率(ガラス弾性率(glass modulus))とが共に等しい($E'_{\mathrm{f}} = E'_{\mathrm{s}}(0) = 10\,\mathrm{GPa}$)モデル積層材料の緩和弾性率を図 9.7(a)に，膜弾性率が基材の初期弾性率より小さく，かつ平衡弾性率(equilibrium modulus)よりは大きい（ $E'_{\mathrm{s}}(0) > E'_{\mathrm{f}} > E'_{\mathrm{e}}\left(\equiv E_{\mathrm{s}}(\infty)\right)$ ）モデル積層材料($E'_{\mathrm{f}} = 5\,\mathrm{GPa}$; $E'_{\mathrm{s}}(0) = 10\,\mathrm{GPa}$, $E'_{\mathrm{e}} = 1\,\mathrm{GPa}$)の緩和弾性率を図 9.7(b)に示す。それぞれの図は膜厚 t_{f} とステップ圧入による圧子接触半径 a との比，t_{f}/a，をパラメータとしてプロットされている。ステップ圧入量が大きくなるに従い，t_{f}/a の値は小さくなり，これに伴い，観測される緩和挙動は順次，被膜の弾性応答から基材の粘弾性応答へと推移して行く様子が良く示されている。

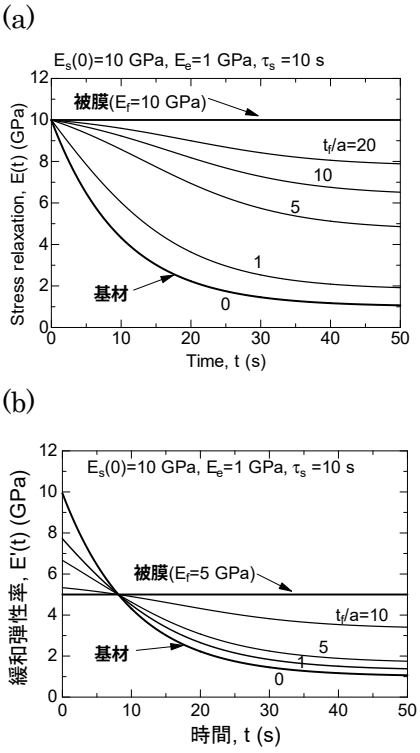


図 9.7 粘弾性基材($E'_{\mathrm{s}}(0) = 10$ GPa，$E'_{\mathrm{e}} = 1\,\mathrm{GPa}$，$\tau_{\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{s}$)に弾性膜((a) $E'_{\mathrm{f}} = 10$ GPa；(b) $E'_{\mathrm{f}} = 5$ GPa)を被覆した積層材に円錐圧子をステップ圧入した際に観測される緩和弾性率 $E'(t)$

(2) 粘弾性皮膜/弾性基材積層材の応力緩和挙動

上記(1)項の積層体とは積層順位が逆である，すなわち，粘弾性膜を完全弾性基材に被覆したモデル積層材料に円錐圧子をステップ圧入した際に観測される粘弾性応答を考察する。(1)項の基材として用いた粘弾性固体(ZenerII モデル)を，本項では膜材として用いる；

$$E'_{\mathrm{f}}(t) = E'_{\mathrm{e}} + \left(E'_{\mathrm{g}} - E'_{\mathrm{e}}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau_{\mathrm{f}}}\right)$$

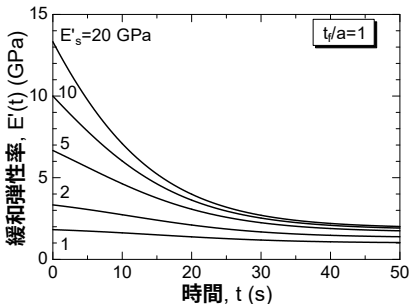
$$\tau_{\mathrm{f}} = 10\mathrm{s} \quad E'_{\mathrm{g}} = 10\mathrm{GPa} \quad E'_{\mathrm{e}} = 1\mathrm{GPa}$$

一方，この膜材を被覆する基材として弾性率を異にする各種の弾性基材を想定し，基材の弾性率 E'_{s} がモデル積層複合材の粘弾性応答に如何なる影響を与えるかについての数値解析結果を示す。

図 9.8(a)には，円錐圧子のステップ圧入量を $t_{\mathrm{f}}/a = 1$ に固定し，この基準値で比較した応力緩和挙動に及ぼす基材の弾性率効果を示す。積層複合材の緩和挙動に及ぼす基材弾性率の効果は，応力緩和初期において特に著しく発現することが図 9.8(a)から見てとれる。積層複合材の緩和現象を規定している緩和時間への基材弾性率の効果が上述した緩和初期における著しい基材効果をもたらす原因となっていることをより明確に示すため，図 9.8(a)で示したグラフの縦軸を初期弾性率 $E'(0)$ で規格化したプロットを図 9.8(b)に示す。この図から良く分かるように，基材弾性率の値が小さくなるに従って，積層複合材の緩和挙動が著しく緩慢となる，すなわち，基材弾性率が小さくなるに従って複合材の緩和時間が著しく長時間側にシフトして行くことが分かる。皮膜の初期弾性率，$E_{\mathrm{f}}(0) = 10$ GPa, に比し基材の弾性率がより大きな場合($E_{\mathrm{s}} > 10$ GPa)，積層複合材で観察される緩和時間は短時間側に，これとは逆に，基材の弾性率が皮膜の初期弾性率より小さい場合($E_{\mathrm{s}} < 10$ GPa)，緩和挙動がより長時間側へとシフトする。図 9.8 はステップ圧入量を $t_{\mathrm{f}}/a = 1$ に固定した場合の積層複合材緩和挙動への基材効果を例示したものである。

ステップ圧入量を増大させて行くに従い，無次元膜厚 t_{f}/a は減少し，この逆数関係で与えられる無次元圧子接触半径 a/t_{f} は増大する。そして，圧入の進行と共に基材効果はより顕著になる。この基材効果を定量的に記述するために，図 9.9 に，基材の弾性率をパラメータに取り，積層複合材の緩和時間 τ と無次元圧子接触半径 a/t_{f} との関係を示す。図 9.9 において，積層複合材の緩和時間 τ は, 規格化した緩和弾性率 $\left[E'(t) - E'(\infty)\right]/\left[E'(0) - E'(\infty)\right]$ が, その初期値の $1/e$ にまで緩和減衰するに要する時間として定義されている。圧入量の小さな領域($a/t_{\mathrm{f}} \approx 0$)では基材効果を受けないため，積層複合材の緩和時間 τ は，粘弾性皮膜の緩和時間 τ_{f} に一致する($\tau = \tau_{\mathrm{f}} = 10$ s)。しかし，圧子圧入量の増大と共に，すなわち，a/t_{f} の増大と共に，基材の影響を強く受けるようになるため，積

(a)



(b)

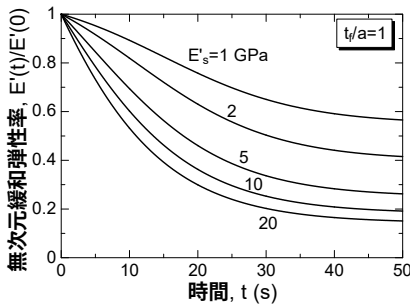


図 9.8

(a) 弾性率を異にする各種の弾性基材に，粘弾性膜($E_{\mathrm{f}}(0) = 10$ GPa, $E'_{\mathrm{e}} = 1$GPa, $\tau_{\mathrm{s}} = 10$ s)を被覆した積層材に円錐圧子をステップ圧入($t_{\mathrm{f}}/a = 1$)した際に観測される緩和弾性率 $E'(t)$ への基材弾性率の影響

(b) 図(a)の縦軸を初期弾性率 $E'(0)$ により規格化したプロット

層複合材の緩和時間は単調に増大する。しかも，この緩和時間の増大傾向は，弾性基材の弾性率が小さいほどより顕著に表れることを図 9.9 は良く示している。この事実は，**膜の粘弾性物性値を調節することなく，完全弾性体である基材の弾性率を調整することにより，積層複合材の粘弾性挙動を自由に設計・制御することのできる**ことを物語っている。

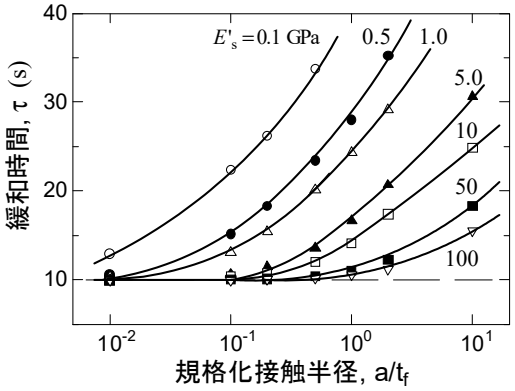


図 9.9 弾性基材の弾性率 E'_s が積層複合材の緩和挙動に及ぼす影響。各種のシンボルは個々の基材の弾性率を表す：

○印(0.1 GPa)，●印(0.5 GPa)，△印(1 GPa)，▲印(5.0 GPa)，
□印(10 GPa)，■印(50 GPa)，▽印(100 GPa)

9.3 弾塑性積層複合材の圧子力学

第 5 章で詳述したように，均質等方弾塑性体に圧子を圧入する過程において Meyer 硬度 H_{M} は弾性場を表す E' および塑性場を表現する Y により一意的に規定される（(5.14)式参照）。一方，積層複合材においては圧子の圧入が進行するに従い基材効果の影響が顕在化してくる。このため圧子周辺の力学環境は圧入初期に見られる皮膜固有の弾塑性力学物性(E_{f}'，Y_{f})が支配する環境から，圧入の進行に伴い，基材固有の弾塑性力学物性(E_{s}'，Y_{s})が支配する環境へと連続的に変化していく。換言すると，図 9.10 に示すように，圧子の圧入方向(積層方向)に空間勾配(異方性)を有する「均質異方体」の弾塑性圧子力学挙動と等価であるとの考えに基づいて積層複合材の弾塑性圧子力学挙動をモデル化・定量化することが可能となる**[9.5]**。

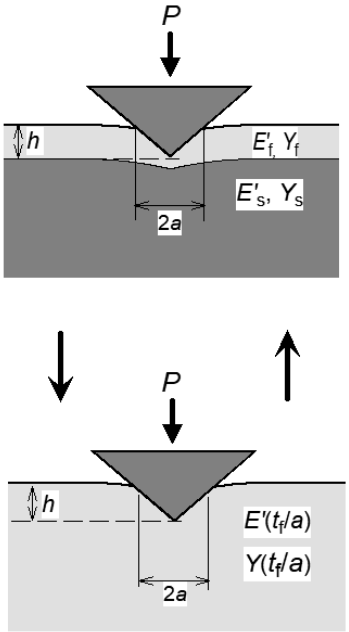


図 9.10 弾塑性積層材と均質異方材モデルとの等価性

第 5 章で示したように，排除体積加成則モデルを適用することにより均質等方体の弾塑性圧子力学応答を定量記述することができた。したがって圧子の圧入方向に弾塑性パラメータが空間勾配を有する均質異方体モデルに排除体積加成則（(5.14)式）を適用し，E' を $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ に Y を $Y(t_{\mathrm{f}}/a)$ に置き換えることで弾塑性積層材 Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t_{\mathrm{f}}/a)$ を次式で表現することができる；

$$\frac{H_{\mathrm{M}}(t_{\mathrm{f}}/a)}{cY(t_{\mathrm{f}}/a)}=\left[\frac{\left\{\varepsilon_{\mathrm{I}}E'(t_{\mathrm{f}}/a)/cY(t_{\mathrm{f}}/a)\right\}^{m}}{1+\left\{\varepsilon_{\mathrm{I}}E'(t_{\mathrm{f}}/a)/cY(t_{\mathrm{f}}/a)\right\}^{m}}\right]^{1/m} \tag{9.16}$$

降伏応力が無限大の極限 $Y(t_{\mathrm{f}}/a)\uparrow\infty$，すなわち，皮膜・基材共に降伏現象を示さない極限を想定した場合，この積層材は第 9.1 節で詳述した弾性積層材に帰着され，(9.16)式の Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t_{\mathrm{f}}/a)$ は次式で与えられる(均質等方体の弾性 Meyer 硬度を表現した(3.32)式との類似性に留意)；

$$H_{\mathrm{M}}(t_{\mathrm{f}}/a)=\varepsilon_{\mathrm{I}}E'(t_{\mathrm{f}}/a) \tag{9.17}$$

(圧入歪 ε_{I} の詳細については第 3 章，第 5 章参照)。したがって圧入方向に空間異方性を有する均質異方弾性複合材モデルの圧子圧入荷重 P は次式により圧子接触面積 A に関係付けられる；

$$P=\varepsilon_{\mathrm{I}}E'(t_{\mathrm{f}}/a)\cdot A \tag{9.18}$$

一方, 第 9.1 節では圧子圧入荷重 P を圧入深さ h に関係付ける定量表現において，有効弾性率 $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ が次式で「定義」された；

$$P = k_h E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a) h^n \tag{9.3}$$

圧子接触面積 A で表現した(9.18)式と圧入深さ h で表現した(9.3)式が等価にならなければならない必然性より， $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ は次式により $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ に関係付けられる；

$$\begin{aligned} E'_{\mathrm{eff}}(t_{\mathrm{f}}/a) &= \left(\frac{A}{A_{\mathrm{H}}}\right)_h E'(t_{\mathrm{f}}/a) \\ &= \left(\frac{a}{a_{\mathrm{H}}}\right)_h^2 E'(t_{\mathrm{f}}/a) \end{aligned} \tag{9.19}$$

上式において $(A_{\mathrm{H}})_h$ および $(a_{\mathrm{H}})_h$ は，第 9.1 節で定義したように，基材効果の存在しない半無限均質等方弾性体(homogeneous body)に圧入深さ h まで軸対称圧子を圧入した際に形成される圧子接触面積および接触半径を，それぞれ，表現したものである。したがって有効弾性率 $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ への基材効果は, 弾性率 $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ および接触面積 A (あるいは接触半径 a)への相乗的基材効果として発現することが(9.19)式から理解できる。 $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ および $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ への基材効果に見られる相違を，円錐圧子の圧入を例に，図 9.11 に示す。圧子の圧入と共に漸増して行く接触半径 a が， $a \geq 0.1t_{\mathrm{f}}$ ($t_{\mathrm{f}}/a \leq 10$)の領域に入ると，図 9.11(a)に示すように， $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ への基材効果が顕著に表れる。一方，図 9.11(b)が示すように， $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ への基材効果は, さらに圧入が進行し, $a \geq 0.5t_{\mathrm{f}}$ ($t_{\mathrm{f}}/a \leq 2$)の領域に入って漸く発現し始める。図で示した $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ および $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ に反映される基材効果の著しい相違は，(9.19)式の $(a/a_{\mathrm{H}})_h^2$ 項が有する著しい基材効果を反映している(図 9.6 参照)。

次に，弾性率が無限大となる極限，すなわち，皮膜・基材共に弾性変形をすることなく，圧入歪の全てが降伏歪として発現する完全塑性積層材の場合について考察を行う。完全塑性積層材の Meyer 硬度 $H_{\mathrm{M}}(t_{\mathrm{f}}/a)$ は(9.16)式に $E'(t_{\mathrm{f}}/a) \uparrow \infty$ を代入することにより次式で与えられる：

$$H_{\mathrm{M}}(t_{\mathrm{f}}/a) = cY(t_{\mathrm{f}}/a) \tag{9.20}$$

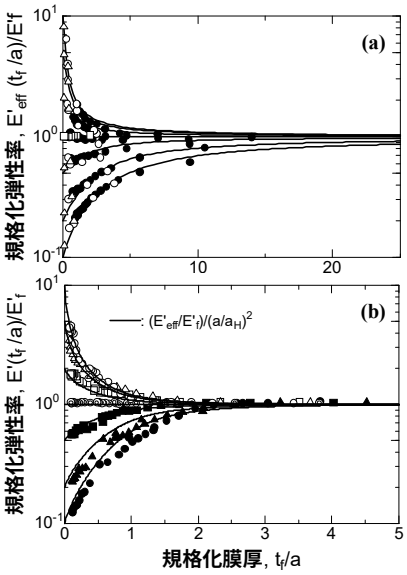


図 9.11 円錐圧子の圧入時に観察される (a) $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$, および, (b) $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ への基材効果。各種のシンボルは有限要素数値解析結果を示す。(a)の実線は Fredholm 積分方程式((9.11) 式) に基づく $E_{\mathrm{eff}}'(t_{\mathrm{f}}/a)$ 厳密数値解(図 9.5 参照), (b)の実線はこの厳密数値解を (9.19) 式に代入して求めた $E'(t_{\mathrm{f}}/a)$ の数値解を示す。それぞれの実線・シンボル群は積層材における皮膜/基材の弾性率比, $E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}$ =10, 5, 2, 1, 0.5, 0.2, および 0.1 を表す

上式は，圧子の圧入方向に塑性異方性を有する「均質異方塑性体モデル」の Meyer 硬度を表現しており，第 5 章で詳述した半無限均質等方完全塑性体の Meyer 硬度（(5.7)式）に対応している。上述の $E'(t_f/a)$ とは異なり，現在までのところ，t_f/a の関数として $Y(t_f/a)$ を定量記述することのできる解析理論は存在しない。しかし，有限要素法を用い，各種の物性を有する膜/基材の組み合わせに対して，これら積層材の $H_M(t_f/a)$ を数値解としてマッピングすることにより積層材の降伏応力 $Y(t_f/a)$ を t_f/a の関数として定量化することができる。有限要素法の解析結果を図 9.12 に示す（各種弾塑性積層材に対して Meyer 硬度 $H_M(t_f/a)$ を求め，(9.16)式より $Y(t_f/a)$ を t_f/a の関数として算出した有限要素数値解)。

以上，詳述した $E'(t_f/a)$ の解析解・数値解(図 9.11)および図 9.12 に示した有限要素解析解 $Y(t_f/a)$ を(9.16)式に代入することにより，任意の $E'(t_f/a)$ および $Y(t_f/a)$ を有する弾塑性積層材の Meyer 硬度 $H_M(t_f/a)$ を数値解として求めることが可能となる。図 9.13～図 9.15 には弾塑性挙動を異にする各種の膜・基材の組み合わせについて有限要素数値解析で求めた Meyer 硬度 $H_M(t_f/a)$ が各種のシンボルで示されている。一方，図中に示した実線・破線は，(9.16)式を用い数値解として求めた予測曲線である。これらの予測曲線は極めて広範囲で弾塑性挙動を異にする膜/基材複合材の硬度を定量的に表現できることが分かる。換言すると，後節(第 11.3 節)で詳述する計装化顕微インデンテーション計測装置を用い弾塑性積層材料の Meyer 硬度を圧子圧入量の関数 a/t_f として定量計測し，その結果を本節で詳述した有限要素解析と組み合わせることにより，膜および基材，それぞれについて，これらの弾性率(E_f，E_s)と降伏応力(Y_f，Y_s)を実験的に分離・定量評価することができる。

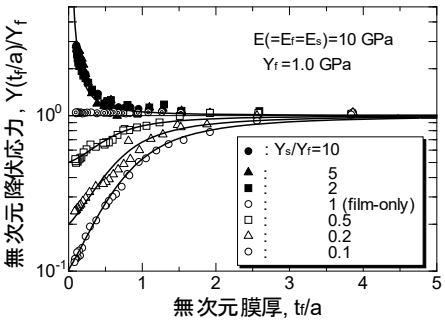


図 9.12 Y_s/Y_f を異にする各種均質異方弾塑性体の無次元降伏応力 $Y(t_f/a)/Y_f$（有限要素数値解析結果）

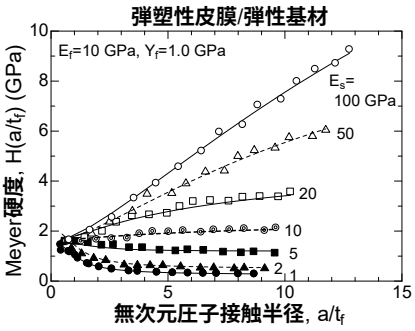


図 9.13 弾性率を異にする各種弾性基材上に弾塑性膜を被覆した積層材の硬度。実線，破線は(9.16)式を用いた予測曲線

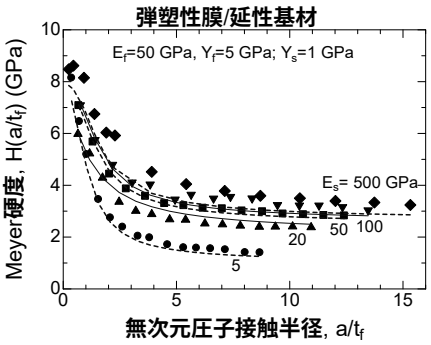


図 9.14　弾性率を異にする各種の延性基材上に弾塑性被膜を被覆した積層材の硬度。実線, 破線は(9.16)式を用いた予測曲線

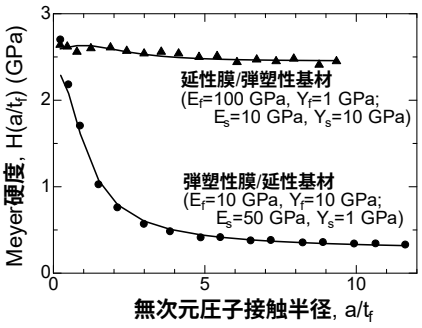


図 9.15　延性被膜/弾塑性基材, および弾塑性被膜膜/延性基材から成る積層材の硬度。実線, 破線は(9.16)式を用いた予測曲線

10 数値圧子力学

前章までの考察から良く理解できるように圧子圧入に伴う力学過程は極めて複雑であり，弾性解析以外の領域では未だに厳密な解析解の得られていないのが実情である。18 世紀後半に端を発する接触力学や圧子力学の長い歴史を振り返ってみると，これらの課題・問題が今後早期に解決されるものではないことも容易に理解できる。一方，1950 年代にボーイング社とワシントン大学により構造解析を目的に提案された有限要素法は，20 世紀後半から急速に発達発展を遂げてきた電子計算機の出現と相まって，特に工学の諸分野で数値解析を通じた問題解決手法として著しい成果を上げている。有限要素法は非線形性の著しい破壊・接触問題，非線形材料の物性解析問題，乱流を伴う流体解析等々，閉じた形での解析解を得ることのできない工学諸分野で数値解析を通じ，実用上極めて有用な情報を提供してきた**[10.1]**。現在，広く用いられている商用パッケージには，(1)アメリカ航空宇宙局(NASA)における構造解析用ソフトとして 1968 年に開発された NASTRAN，(2) 1980 代以降，米国を中心に数値圧子力学(numerical indentation contact mechanics)の分野で多用されている ABAQUS，そして(3)パーソナルコンピュータでの利便性に優れた ANSYS が広く知られている。本章では，軸対称性を有する球・円錐圧子に焦点を絞り，数値圧子力学解析の信頼性・有用性，そして現状について考察を行う。

[10.1] 三好俊郎，有限要素法入門，培風館 (1994)

10.1 有限要素法を用いた構造・物性解析の特徴

有限要素法（Finite Element Method (FEM)）・有限要素解析（Finite Element Analysis (FEA))の基礎理論，数学的アルゴリズム，要素作成技術，境界条件・初期条件の設定，解析に組み込む材料物性の選定等々に関しては多くの優れた書籍(例えば**[10.1]**)や文献を容易に入手できるため，本書では圧子力学への FEM 適用にのみ焦点を当てた考察を行う。商用 FEM パッケージでは解析に用いる構造物の形状作成，個々の解析に適した要素の選択，要素の自動分割，材料物性パラメータの設定，各種境界条件設定の詳細プログラミング，解析結果の数値化・グラフ処理・可視化等々を容易に行うための対話型ユーザーインターフェイスを備えている。

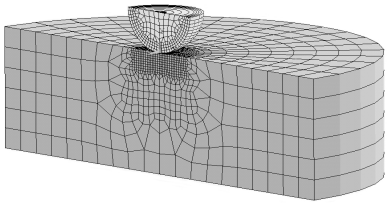


図10.1 球形圧子の軸対称有限要素解析を目的に作成された要素分割(メッシュ作成)の例

連続体への球形圧子圧入過程・徐荷過程等の解析で用いる要素

分割の一例を図 10.1 に示す。応力・歪の空間勾配が著しい圧子接触部位では解析精度を向上させるため，要素の細分割を行う必要がある。完全弾性体に Vickers/Berkovich 等価円錐圧子を深さ $h=3$ μm まで圧入した際に生じる圧子周辺自由表面の沈み込み(sink-in)形状，および圧子直下における圧入方向変位分布を図 10.2 に例示する。図 10.1 および図 10.2 から良く理解できるように，力学応答に関わる数値情報のみならず材料内部の応力・歪等の情報を**可視化表現出来る**ことが有限要素解析の利点・特長であり，圧子力学のより直感的かつ材料物理学的な理解を深めることができる(既に，例えば図 4.4，5.3，8.5 等々に FEA の結果が示されている)。

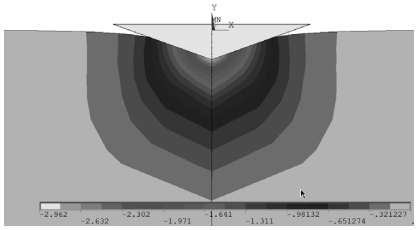


図 10.2 完全弾性体に Vickers/Berkovich 等価円錐圧子を深さ $h=3\,\mu\mathrm{m}$ まで圧入した際に観測される圧子直下および圧子周辺部における圧入方向変位分布および圧子外周自由表面の変形

10.2 弾性解析

均質等方弾性体の圧子力学に関しては，第 3 章で詳細を述べたように，任意形状の軸対称圧子問題への解析解が存在する。本章では，最も代表的な圧子形状である球形圧子および円錐圧子について，これらの解析解を FEA 数値結果と比較検討し FEA 結果の信頼性を検証する。さらに，解析解では取扱いに困難を伴ったポアソン比の影響についても考察を加える。

圧子圧入荷重 P と圧入深さ h の関係式，P - h 関係式，は第 3 章で示したように，球形圧子圧入(Hertz 理論)では

$$P=\frac{4}{3}E'\sqrt{R}h^{3/2} \tag{3.18}$$

円錐圧子(Sneddon 理論)では

$$P=\frac{2\cot\beta}{\pi}E'h^2 \tag{3.25}$$

により与えられている。これらの解析解は弾性体を「非圧縮連続体」すなわち $\nu=0.5$ と仮定したモデルを基に導出されているため $\nu\approx0.3$ で近似できる多くの実用工業材料への適用には問題がある。上記の解析解では弾性率として平面歪弾性率 $E'\left(=E/\left(1-\nu^2\right)\right)$ を用いているため，一見，理論体系にポアソン比の影響が組み込まれているかに見受けられるが，根底となる理論に非圧縮性弾性体($\nu=0.5$)を仮定しておりポアソン効果が厳密に組み込まれていないことに留意する必要がある。一方，有限要素解析では対象とする材料のポアソン比を自由に設定できるため，体積変化を伴う実用材料の力学応答を精査することができる。球形圧子および円

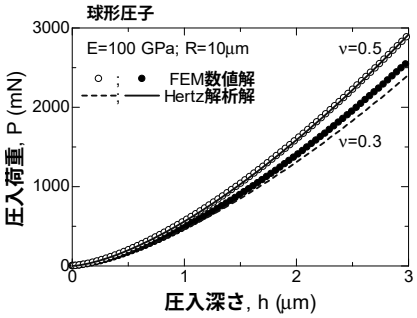


図 10.3 半径が $R=10$ μm の球形圧子圧入時の P - h 曲線。Hertz 解析解(実線：$\nu=0.5$；破線：$\nu=0.3$)。FEM 数値解(○印：$\nu=0.5$；●印：$\nu=0.3$)

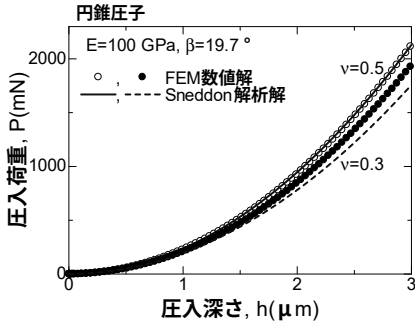


図 10.4 円錐圧子圧入時の P - h 曲線。Sneddon 解析解(実線：$\nu=0.5$；破線：$\nu=0.3$)。FEM 数値解(○印：$\nu=0.5$；●印：$\nu=0.3$)

錐圧子の圧入における P - h負荷曲線へのポアソン効果の影響を図 10.3 および図 10.4 に示す。$E'\left(=E/\left(1-\nu^2\right)\right)$ の算出に当たって $\nu=0.5$ および $\nu=0.3$ を用いた解析解が，それぞれ，実線および破線で示されている。一方，FEM 数値解では，これらのポアソン効果が，それぞれ，○印および●印でプロットされている。これらの図からも良く分かるように，$\nu=0.5$ の場合，解析解と FEM 数値解は極めて良好な一致を示す。一方，$\nu=0.3$ の場合には解析解が非圧縮性弾性体を仮定していることに起因し，FEM 数値解よりも解析解が常に圧入荷重を過小予測してしまうことが分かる。

第 3 章で示したように完全弾性体の圧子圧入に伴う自由表面の変形は球形圧子の場合

$$\begin{aligned} u_z(\rho,0) &= \frac{a^2}{\pi R}\left[\left(2-\rho^2\right)\sin^{-1}\frac{1}{\rho}+\sqrt{\rho^2-1}\right] \\ &= \frac{h}{\pi\rho^2}\left[\left(2-\rho^2\right)\sin^{-1}\frac{1}{\rho}+\sqrt{\rho^2-1}\right]; \quad \rho\geq 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

円錐圧子の場合，

$$u_z(\rho,0)=\frac{2h}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{1}{\rho}-\rho+\sqrt{\rho^2-1}\right]; \quad \rho\geq 1 \tag{3.27}$$

で表現できる。これらの解析解と有限要素数値解(ポアソン比 $\nu=0.5$)との比較を図 10.5 に示す。解析解と数値解との間に極めて良好な一致が見られる。これら両者に見られる良好な一致は，FEM 解析結果の信頼性を保証するものである。

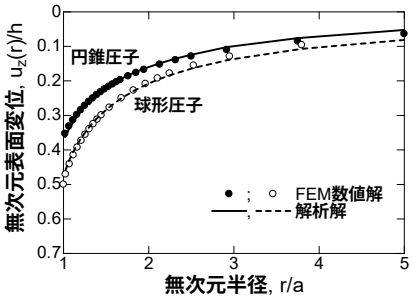


図 10.5 球形圧子および円錐圧子の圧入に伴う圧子外周部自由表面の変位($\nu=0.5$)。プロット(●，○印)は FEM 数値解，実線および破線は解析解((3.20)，(3.27)式)を示す(図 3.6 参照)

10.3 弾塑性解析

(1) P - h 履歴曲線

第 5 章で詳述したように，現在までのところ，排除体積加成則理論を除くと，弾塑性領域における圧子力学の定量的な解析解は存在しない。したがって，この領域では有限要素法を始めとする数値解析が定量化において重要な役割を担う。

弾塑性域では圧子荷重 P と圧入深さ hの関係を表す曲線，P - h 曲線，は圧子の圧入と徐荷の過程で塑性流動に起因した履歴現象を示す(図 5.5，5.8～5.10 参照)。この事実は，実測 P - h履歴曲線データに有限要素数値解析結果を適用することにより，弾塑性材料の弾性率 E' および降伏応力 Y の分離定量評価が可能性となることを示唆している。ピラミッド・円錐圧子の圧入過程とこれに続

く徐荷過程での $P-h^2$ 直線プロット，およびその際に観測される圧子と弾塑性体の接触幾何形状の様子を図 10.6 に示す。以下に詳述するように，圧入過程での接触深さ h_c は接触面積 A を算出する上で，また，徐荷後に観測される残留圧痕深さ h_r は塑性流動定量のために，力学物性計測上，極めて重要な役割を果たす。第 3 章および第 5 章で考察したようにピラミッド圧子(Vickers・Berkovich 圧子)あるいは円錐圧子の場合，その幾何相似性により圧入歪 ε_I は圧子面傾斜角度 β にのみ依存し，圧子圧入量(h)には依存しない，すなわち $\varepsilon_I = \tan\beta/2$ により与えられる(表 3.1 参照)。この事実は実測された P - h曲線から弾塑性パラメータを定量する上で多くの利点となる。図 5.5 の有限要素数値解結果で例示したように，特性(PI)を大きく異にする各種の弾塑性材料に対し，圧入過程・徐荷過程共に $P-h^2$ プロットが直線で表現できるのは，圧入歪が圧入深さ hに依存しないことを意味している。図 10.6 では圧子荷重 P における圧子/材料表面接触深さを h_c，徐荷後に形成される残留圧痕の深さを h_r，圧痕側面傾き角度を β_r で規定している。圧入・徐荷過程での $P-h^2$ プロットがそれぞれ直線で表現される事実により，「負荷係数(loading coefficient)， k_1」および「徐荷係数(unloading coefficient)， k_2」を用いピラミッド・円錐圧子の負荷徐荷過程を次式で記述することが出来る；

$$P = k_1 h^2 \tag{10.1}$$

$$P = k_2 (h^2 - h_r^2) \tag{10.2}$$

さらに，最大圧入深さ hで負荷曲線と徐荷曲線が交差一致する事実により次式が成立する；

$$k_1 = k_2 \left(1 - \xi_r^2\right) \tag{10.3}$$

ここに ξ_r は無次元圧痕深さ $h_r/h(\equiv\xi_r)$ を表しており，ξ_r を介して負荷係数 k_1 と徐荷係数 k_2 は相互に関係付けられている。負荷係数 k_1 および無次元圧痕深さ h_r/h は，以下に示すように，圧子圧入を支配する弾塑性パラメータ PI と密接な関係にある。一方，圧子徐荷時の弾性回復を反映する徐荷係数 k_2 は弾性率 E' に強く支配される。各種の弾塑性材料に付いて有限要素数値解析から得られた無次元負荷・徐荷係数 k_1/Y， k_2/E'，および無次元圧痕深さ h_r/h と塑性歪 PI $(=\varepsilon_I E'/cY)$ との関係を，それぞれ図 10.7～図 10.9 に示す。極めて広範囲にわたる弾塑性材料(0.5 GPa ≤ E' ≤ 500 GPa,

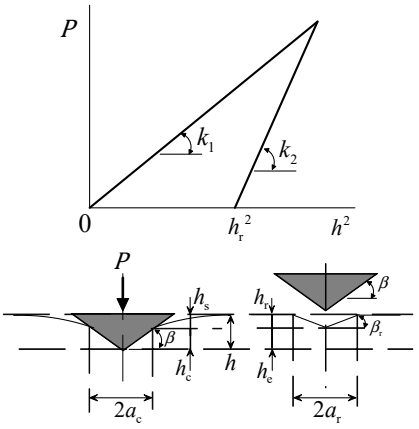


図 10.6 ピラミッド・円錐圧子の負荷徐荷過程における $P-h^2$ 直線プロットおよび弾塑性体の表面変形

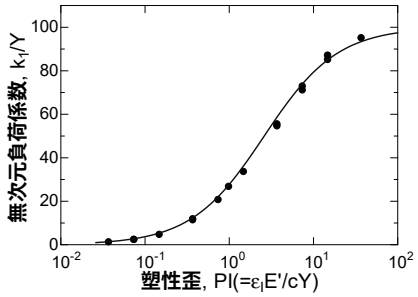


図 10.7 無次元負荷係数 k_1/Y と塑性歪 PI の関係 (Vickers・Berkovich 等価円錐圧子に対する有限要素数値解)

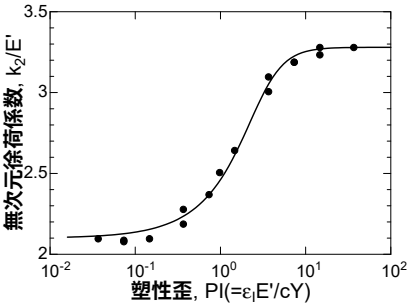


図 10.8 無次元徐荷係数 k_2/E' と塑性歪 PI の関係 (Vickers・Berkovich 等価円錐圧子に対する有限要素数値解)

0.5 GPa ≤ Y ≤ 100 GPa)に対して，これらの図に示すように，弾塑性パラメータ(無次元負荷係数，無次元徐荷係数および無次元残留圧痕深)が塑性歪 $PI\left(=\varepsilon_1 E'/cY\right)$ により，それぞれ，一意的に記述できることが分かる。この事実は，計装化汎用インデンテーション計測装置を用い，容易に計測することのできる負荷係数 k_1，徐荷係数 k_2，および残留圧痕深さ h_r のうち，いずれか二つの計測結果を図 10.7～図 10.9 に適用することにより，弾塑性体の $PI\left(=\varepsilon_1 E'/cY\right)$，ひいては弾性率 E' および降伏応力 Y を分離定量評価出来ることを意味している。すなわち：

(i) 実測された h_r/h 値を図 10.9 の縦軸に適用し，これに対応する図の横軸から塑性歪 $PI\left(=\varepsilon_1 E'/cY\right)$ を求める。この値を図 10.7 の横軸に適用し，対応する縦軸の値から k_1/Y を決定する。この値と実測された負荷係数 k_1 値より，降伏応力 Y が決定される。さらに，この Y 値と先に求めた $PI\left(=\varepsilon_1 E'/cY\right)$ 値から，弾性率 E' が決定される。あるいは

(ii) 初期値として，例えば降伏応力 Y_0 を適当に設定し，この値で実測された k_1 を除した値，k_1/Y_0，を図 10.7 の縦軸に適用し，対応する図の横軸から得られる塑性歪 $\varepsilon_1 E'/cY_0$ より初期値としての弾性率 E_0' を求める。これらの値，Y_0 および E_0' を図 10.8 の横軸(塑性歪)に代入し，対応する縦座標の値に先に実測された k_2 値を適用し，一次近似弾性率 E_1 を決定する。次に，このようにして求めた値 $\varepsilon_1 E_1'/cY_0$ を図 10.7 の横軸に適用し，対応する図の縦軸から一次近似降伏応力 Y_1 を決定する。順次，これらの操作を繰り返すことによりにより，最終的な収束値として，弾塑性体の弾性率 E' および降伏応力 Y をそれぞれ分離定量評価する。

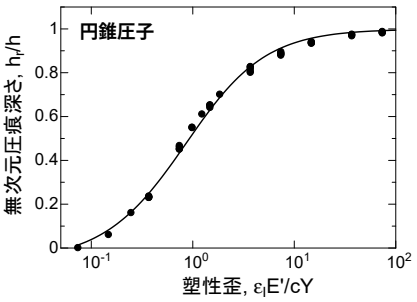


図 10.9 無次元残留圧痕深さと塑性歪 PI の関係(Vickers・Berkovich 等価円錐圧子に対する有限要素数値解)

上述した負荷・徐荷係数 k_1，k_2 および残留圧痕深さ h_r のほかにも，圧子と材料表面との間に形成される接触深さ h_c (図 10.6 参照)は弾塑性圧子力学物性を反映する重要な物理量である。事実，第 5 章，図 5.6 で，無次元接触深さ h_c/h は塑性歪 $\varepsilon_1 E'/cY$ により一意的に記述できることを示した。この事実を図 5.6 および図 10.9 と組み合わせることにより，h_c/h を h_r/h に一意的に関連付けること

が可能となる。このようにして求めた h_c/h と h_r/h との関係を図 10.10 に示す。図 10.10 を用いることにより，汎用計装化インデンターで**実測可能な** h_r から**実測不可能な** h_c を容易に求めることができる。このようにして求めた圧子接触深さ h_c の値から圧子接触半径 a_c，更には，第 3 章・第 5 章で強調したように，各種の圧子力学パラメータ算出に当たって不可欠となる圧子接触面積 A の算出が可能となる。

図 10.10 において，円錐圧子の圧入を例に考察を行うと，完全弾性域($h_r/h \to 0$)では，接触深さが(3.28)式で示した Sneddon の解析解 $h_c/h = 2/\pi$ へと収束していることが分かる。h_r/h の増大と共に圧子周辺での塑性流動は顕在化し，これと共に h_c/h も単調に増大する。換言すると，h_r/h の増大，すなわち，塑性変形の増大と共に圧子の圧入により誘起される自由表面の沈み込み(sink-in)が漸減し，$h_r/h \approx 0.85$ で $h_c/h = 1$ となり，圧子周辺自由表面での沈み込み(sink-in)や盛り上がり(pile-up)現象の生じない状態が現れる。一方，$h_r/h \to 1$ により与えられる完全塑性域では，自由表面に向かう顕著な塑性流動により著しい pile-up が誘起され，接触深さは $h_c/h \approx 1.1$ へと増大する。有限要素法を用いて可視化した自由表面の pile-up/sink-in と塑性歪 $PI\left(=\varepsilon_1 E'/cY\right)$ との関係は既に図 5.6 および図 5.7 に示されている。図 10.10 には球形圧子についても上述の円錐圧子の場合と類似の現象が示されている。

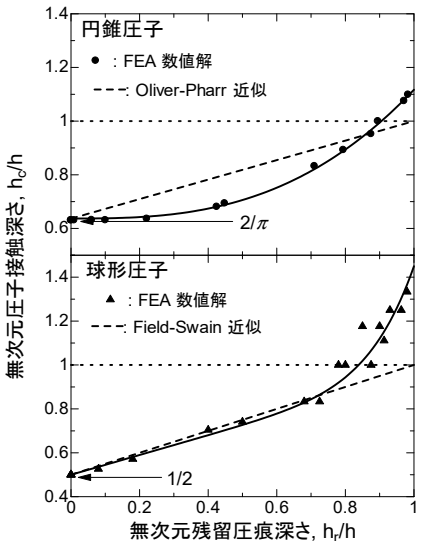


図 10.10 無次元接触深さ h_c/h と無次元残留圧痕深さ h_r/h との関係。破線は，それぞれ，Oliver-Pharr 近似解(円錐圧子)および Field-Swain 近似解(球形圧子)を示す。Vickers・Berkovich 等価円錐圧子に対する有限要素数値解を●印，球形圧子に関する有限要素数値解を▲印で示す

(2) Oliver-Pharr/Field-Swain 近似 [10.2-10.4]

上述の有限要素数値解析とは別に，実測可能な h_r/h を実測不可能な h_c/h に関連付ける近似解析(円錐・ピラミッド圧子に関する Oliver-Pharr 近似，球形圧子に関する Field-Swain 近似)を以下に紹介する。これらの近似解析手法は実用的観点から提案され，汎用計装化インデンターを用いた弾塑性パラメータの定量に広く用いられている。弾性率 E'，降伏応力 Y を有する「弾塑性体」について，圧入荷重 P までの圧子負荷過程と，これに続く徐荷過程で誘起される圧入変形の間には次式で示す関係が存在する(図 10.6 参照)；

$$h = h_s + h_c = h_r + h_e \tag{10.4}$$

Oliver-Pharr/Field-Swain 近似では，上述の弾塑性体と同一の圧入荷重 P を，弾性率 E' を有する「完全弾性体」に付加した際に誘起され

[10.2] W.C. Oliver, G.M. Pharr, J. Mater. Res., **7**, 1567 (1992)
[10.3] J.S. Field, M.V. Swain, J. Mater. Res., **8**, 297 (1993)
[10.4] M. Sakai, "Principle and Application of Indentation", in *Micro and Nano Mechanical Testing of Materials and Devices*, Edited by F. Yang, J.C.M. Li, 1-47, Springer (2008)

る圧入深さおよび自由表面沈み込み深さが，それぞれ，上述の弾塑性体の場合と同じ値，h_e， h_s，で与えられると「仮定」している。一方，完全弾性体の h_e と h_s の間には，次式で示す圧子力学解析解が成立する((3.21)式，(3.28)式)；

$$\frac{h_s}{h_e}=\frac{1}{2}\text{(球形圧子)} \tag{10.5}$$

$$\frac{h_s}{h_e}=1-\frac{2}{\pi}\text{(円錐圧子)} \tag{10.6}$$

これらの関係を弾塑性体の圧入変形を記述した(10.4)式に代入することにより最終的に，h_r/h を h_c/h に関連付ける以下の近似式を得る；

Field-Swain 近似式：

$$\frac{h_c}{h}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{h_r}{h}\right)\text{(球形圧子)} \tag{10.7}$$

Oliver-Pharr 近似式：

$$\frac{h_c}{h}=\frac{2}{\pi}\left[1-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\frac{h_r}{h}\right]\text{(円錐圧子)} \tag{10.8}$$

図 10.10 には有限要素数値解との比較で，Oliver-Pharr 近似/Field-Swain 近似((10.7)式, (10.8)式)を, それぞれ, 破線で示す。(10.7)式，(10.8)式は共に, 弾性解である(10.5), (10.6)式を仮定しているため，図 10.10 に見るように，これらの近似式は共に，完全塑性変形を記述する $h_r/h\to 1$ で，その接触深さは $h_c/h=1$ に収束し，塑性流動に伴う自由表面の pile-up 現象を記述することができない。

(3) 歪硬化則

第 5 章および本章では弾性限界を越える歪場において降伏応力が歪に依存することなく一定値 Y をとる，いわゆる「完全弾性-完全塑性体」(non-hardening material)を念頭に議論を進めてきた。しかし，金属材料を始めとする多くの実用材料は歪硬化・加工硬化現象(strain hardening，work hardening)を示し，図 10.11 で示すように弾性限界を越える歪領域で，歪の増加と共に降伏応力が単調に増大することが広く知られている。このように歪硬化現象を示す弾塑性体の圧子力学においては, 塑性歪 $PI\left(\equiv\varepsilon_1 E'/cY\right)$ に含まれる降伏応力 Y 並びに図 10.7～図 10.9 に含まれる Y 値を「歪の増大と共に単調に増大する降伏応力の代表値， Y_R (representative yield

stress)」で置き換えることにより，上述の解析等を定量的に行うことのできることが有限要素数値解析や Tabor 達の実験的検証から明らかにされている**[4.1, 10.5, 10.6]**。換言すると，例えば図 10.7～図 10.9 を用い，上述した一連の操作により実験的に求めた降伏応力は Y ではなく Y_R であることを意味している。図 10.11 に示すように代表降伏応力 Y_R は代表塑性歪 $(\varepsilon_p)_R$ あるいは代表歪 ε_R により規定される降伏応力として定義される。有限要素解析結果(**[10.6]**)から，この代表塑性歪 $(\varepsilon_p)_R$ は

$$(\varepsilon_p)_R = 0.44\varepsilon_I \tag{10.9}$$

により圧入歪 ε_I に関係付けることができる。したがって面傾き角度 β の円錐圧子の場合，その Y_R は

$$(\varepsilon_p)_R = 0.22\tan\beta, \tag{10.10}$$

また，半径 R の球形圧子の Y_R は

$$(\varepsilon_p)_R = 0.19\frac{a}{R} \tag{10.11}$$

により規定される代表塑性歪 $(\varepsilon_p)_R$ での降伏応力値として与えられる(図 10.11 参照)。

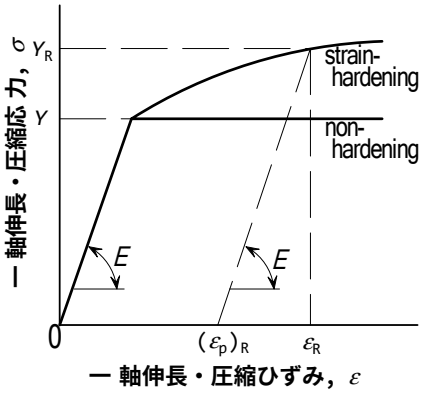


図 10.11 弾塑性体の応力 σ-歪 ε 曲線(Stress-Strain 曲線；S-S 曲線)。歪硬化現象を示す材料においては弾性限界を越える歪で S-S 曲線は歪と共に単調に増大する。代表降伏応力 Y_R および代表塑性歪 $(\varepsilon_p)_R$ を用いることにより歪硬化を示す材料の弾塑性圧子力学挙動を定量記述することができる

(4) 拘束因子 c に及ぼす圧子形状および圧子/材料界面接触摩擦の影響

圧子と材料との接触界面における接触摩擦が圧子力学挙動におよぼす影響については，その現象の複雑さに起因し，弾性圧子力学の領域においてさえ定量的な解析が為されていないのが現状である。圧子形状および圧子/材料界面接触摩擦は塑性変形の著しい延性材料において観測される接触界面近傍におけるパイルアップ現象(図 5.6，図 5.7 参照)，更には，このパイルアップに伴い圧子接触面に沿って材料自由表面に向かう塑性流動を拘束する「拘束因子(constraint factor)，c」(第 5 章および(5.7)式参照)に著しい影響を与えることが予想される。圧子/材料界面接触摩擦(contact friction)は界面に沿って自由表面に向かう塑性流動への摩擦抵抗となるため，接触摩擦の値が大きくなるにつれて拘束因子 c の値も大きくなると考えられる。さらに，円錐・ピラミッド圧子を例に取ると，圧子側面傾き角度が大きくなるに従い，すなわち，圧

[10.5] D. Tabor, “Hardness of Metals”, Clarendon (1951)
[10.6] M. Sakai, T. Akatsu, S. Numata, K. Matsuda, *J. Mater. Res.*, **18[9]**, 2087 (2003)

子頂角部が鋭くなるに従って，材料自由表面に向かう塑性流動はより容易になり，その結果，拘束因子 c の値は小さくなると考えられる。第 5 章で述べたように，延性に富む金属材料を用いた実験結果から，圧子の形状および接触摩擦に依存し，拘束因子の値は $2.5 \le c \le 3.5$ の範囲で変化することが知られている。一方，有限要素法を用いると，任意の圧子形状および広範囲にわたる圧子/材料界面接触摩擦係数に関わる拘束因子 c を数値解析として比較的容易に求めることが可能となる。一例として，有限要素法を用いて解析した Vickers/Berkovich 等価円錐圧子(圧子面傾き角度 $\beta = 19.7°$)の拘束因子 c と圧子接触摩擦係数 μ との関係を図 10.12 に示す。図が示すように, Vickers/Berkovich 等価円錐圧子の場合，$0 \le \mu \le 0.2$ の範囲では接触摩擦の増加と共に拘束因子はその初期値である $c \approx 2.65$ から急激に増大し，$\mu > 0.2$ の領域では，ほぼ一定値である $c \approx 3.2$ へと収束する。一方，多くの実用材料に対するダイヤモンドの接触摩擦係数の値は $0.1 \le \mu \le 0.5$ の範囲にあり，Vickers/Berkovich ダイヤモンド圧子の圧入に関わる拘束因子の値は $3.0 \le c \le 3.2$ となることが実験により確認されている(**[10.5]**)。

拘束因子 c は円錐・ピラミッド圧子の面傾き角度にも強く依存する。一例として，面傾き角度 β を異にする 3 種類の円錐圧子について, これら圧子の拘束因子を図 10.13 に示しておく(FEM 数値解析結果)。面傾き角度 β の増大，すなわち，円錐圧子の頂角がより鋭角になるほど圧子接触面に沿って自由表面に向かう塑性流動が容易となるため，拘束因子の値 c が減少すること，さらに，圧子/材料界面接触摩擦が増大するにつれて，拘束因子 c の圧子面傾き角度への依存性が低減することを図 10.13 は示している。

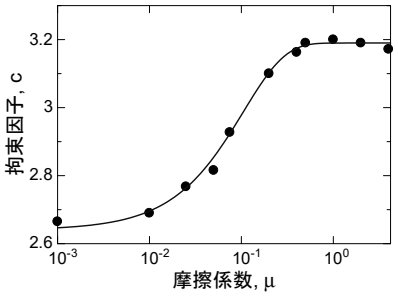


図 10.12 Vickers/Berkovich 等価円錐圧子の圧入に伴い圧子側面に沿って生じる自由表面への塑性流動を定量記述する拘束因子 c に及ぼす圧子/材料界面接触摩擦の影響(FEM 数値解析結果)

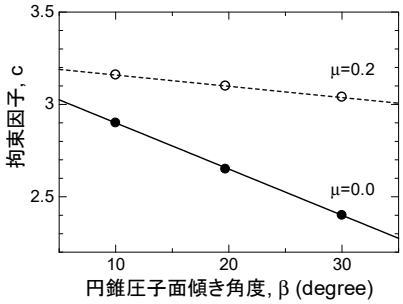


図 10.13 拘束因子 c に及ぼす円錐圧子面傾き角度 β の影響(FEM 数値解析結果；界面接触摩擦係数 $\mu = 0.0$ および $\mu = 0.2$)

10.4 粘弾性解析

第 10.3 節の弾塑性解析とは異なり粘弾性解析においては第 6, 7 章で述べたように「弾性-粘弾性対応原理」が成立するため，弾性圧子力学の解析解を粘弾性領域に定量的に拡張することができる。換言すると，有限要素数値解析に頼ることなく多くの圧子力学問題を取り扱うことができる。しかし，圧子の圧入と徐荷の過程で不可避的に導入される圧子周辺部位における体積変化の時間依存性(時間依存ポアソン効果；図 6.7～図 6.10 参照)が粘弾性圧子

学力学挙動の定量解析を複雑にしている。事実, Vickers・Berkovich 等価円錐圧子を圧入深さ h_0 へステップ圧入した際，ポアソン比が応力緩和に伴い増大していくため，圧子圧入深さを一定に保っているにもかかわらず，圧子周辺の自由表面が時間と共にせり上がっていく現象(creeping-up)が粘弾性液体の有限要素解析結果から認められる。Maxwell 液体(ずり緩和弾性率 $G(t)=G_{\mathrm{g}}\exp\left(-t/\tau\right)$；ガラス弾性率 $G_{\mathrm{g}}=36.4$ GPa，緩和時間 $\tau=200$ s，ポアソン比 $\nu_g=0.1$)を例にとり，有限要素数値解析から求めた圧子接触面のせり上がりの様子を図 10.14 に示す。この結果は，圧入深さを一定値 h_0 に保っていても，圧子接触面積が時間と共に増大する，すなわち接触面積に時間依存性の見られることを意味している。このため，ステップ圧入試験にもかかわらず，(7.6)式を用いて実測された荷重緩和曲線 $P(t)$ から緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を求めることはできない。緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を実験から求めるためには，(7.6)式に代わり，接触面積の時間依存性を考慮した(7.3)式

$$P(t)=\frac{\tan\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dA(t')}{dt'}dt' \qquad (7.3)$$

を用いる必要がある。したがって圧子荷重緩和 $P(t)$ の計測のみならず，汎用計装化インデンターでは計測不可能な時間依存接触面積 $A(t)$ をも時間の関数として計測しなければならない(接触面積の実測を可能とした計装化顕微インデンターの詳細については後節(第 11.3 節参照)。一方，図 10.14 に示したように，有限要素解析においてはポアソン効果に起因する時間依存接触面積 $A(t)$ を定量評価出来るため，圧子荷重緩和 $P(t)$ および時間依存接触面積 $A(t)$ の数値解を(7.3)式に代入することにより，平面歪緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を容易に定量することができる。一例として，ずり緩和弾性率 $G(t)$ が(6.26)式で与えられる単一緩和粘弾性液体モデル($G_g=3.85$ GPa, $G_{\mathrm{e}}=0$ GPa, $\tau_0=200$ s, $\nu_{\mathrm{g}}=0.3$)を用い有限要素数値解析により求めた $P(t)$ および $A(t)$ を(7.3)式に適用して求めた緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ と，第 6.4 節で詳述した時間依存ポアソン比を基に算出した $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ の解析解((6.29)式)との比較を図 10.15

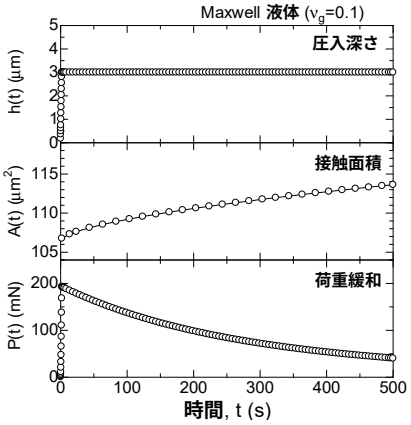


図 10.14 単純 Maxwell 液体に対する円錐圧子のステップ圧入試験で観察される荷重緩和と圧子接触面積のせり上がり現象(creeping-up) (FEM 数値解析結果)

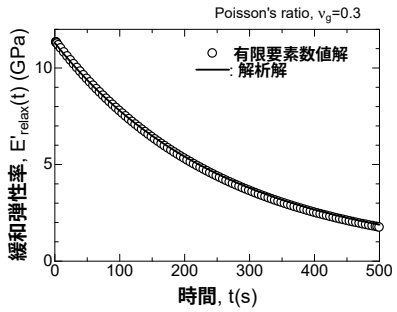


図 10.15 ポアソン比に時間依存性の認められる粘弾性液体に円錐圧子をステップ圧入した際に観測される圧子荷重緩和 $P(t)$ と時間依存接触面積 $A(t)$ を(7.3)式に代入して求めた緩和弾性率：有限要素数値解(○印)と解析解(実線；(6.29)式)

に示す。図から良く分かるように有限要素数値解が定量的に解析解を再現している。この良好な一致は，より複雑な実用材の粘弾性挙動解析(例えば第 10.5 節参照)に当たって有限要素法を用いた数値圧子力学が極めて有力な解析手段となることを物語っている。

10.5 積層複合材への適用

第 9.1 節および第 9.2 節で詳述したように積層材の圧子力学は「弾性複合材」および弾性-粘弾性対応原理の適用が可能な「線形粘弾性複合材」においてのみ解析解が存在するものの，Boussinesq Green 関数((9.7)式)や第 2 種 Fredholm 積分方程式((9.11)式)を用いた極めて複雑な数値解析が必要となる。しかし，これら積層複合材料においても，被膜/基材接合界面の力学的整合性(mechanical consistency)(界面の接合度合い)を定量的に組み入れた解析解は存在しないため，もっぱら有限要素に代表される数値圧子力学に頼らざるを得ないのが現状である。有限要素数値解析では実用積層材の接合界面力学的整合性を定量的に反映することのできることに加え，3 層以上の積層構造を有する工業材料の圧子力学においても有力な解析手法を提供する。一例として，有限要素数値解析で用いた 3 層構造からなる積層材モデルを図 10.16 に示す。このモデル三層積層材は厚さ 5μm の弾塑性皮膜($E_{\mathrm{f}}=100\,\mathrm{GPa}$; $Y_{\mathrm{f}}=10$ GPa; $\nu_{\mathrm{f}}=0.3$)が厚さ 1μm の粘弾性接合層を介して弾性基材($E_{\mathrm{s}}=100\,\mathrm{GPa}$; $\nu_{\mathrm{s}}=0.3$)に接着された構造を有している。Maxwell 液体($E_{\mathrm{relax}}(t)=E_{\mathrm{g}}\exp\left(-t/\tau\right)$; E_{g} =10GPa; τ =200s)からなる粘弾性接合層を想定している。中間層とし挿入されている粘弾性接合層がこの積層材の圧子力学挙動に及ぼす影響を明らかにするため，図 10.16 には，参照材料として弾塑性被膜/弾性基材からなる二層複合材料も示されている。これら二層および三層積層複合材料に Vickers 等価円錐圧子を圧入深さ $h=3.0\,\mu\mathrm{m}$ まで

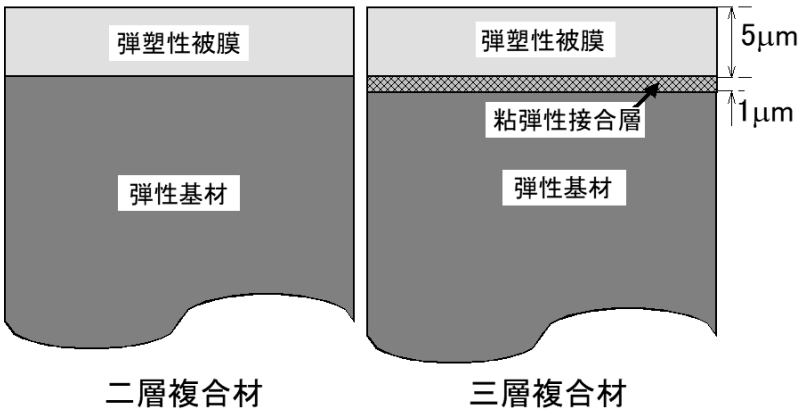


図 10.16 有限要素解析に用いた二層積層複合材(弾性基材上の弾塑性被膜)および三層積層複合材(粘弾性接合層を介した弾性基材上の弾塑性被膜)

400s 掛けて定速圧入し，その後 1000s まで，その圧入深さを保持した際に観測される圧子荷重の時間変化を図 10.17 に示す。粘弾性接合層を有する三層積層複合材の場合には接合層内部での粘性流動に起因した圧子荷重緩和挙動が観測される。中間層であるこの粘弾性薄膜層は時間依存性を有しない弾塑性表面被覆層と弾性基材の間で幾何学的に拘束されているため，このモデル粘弾性接合層の緩和時間が τ=200s に設定されているにもかかわらず, 積層複合材の緩和挙動は，図 10.17 に見るように極めて緩慢である。

弾性基材に粘弾性膜を被覆した二層積層複合材において，被膜粘弾性体の物性値をなんら調節することなく，基材の弾性率のみを調整することにより，積層複合材の粘弾性挙動を自由に設計・制御出来ることを第 9.2 節で述べた（図 9.8 および図 9.9 参照)。図 10.17 でその一例を示した粘弾性接着層を含む三層積層複合材においても，前述の二層複合材と同様に，弾性基材の弾性率のみを調整することにより，この三層積層材の粘弾性挙動を調整・制御することが出来る。図 10.17 には，弾性基材の弾性率として $E_s = 100$ GPa を例にとり三層積層複合材の応力緩和挙動を○印で示したが, 基材弾性率の値を $10\text{GPa} \le E_s \le 500\text{GPa}$ の範囲で変化させた際に見られる積層複合材の圧子荷重緩和 $P(t)$ の相違を図 10.18 に示す（FEM 数値解析結果)。基材弾性率 E_s の増大と共に積層複合材の緩和挙動がより顕著になる，すなわち，緩和時間がより短時間側にシフトして行く様子が示されている。この事実は基材の「弾性率」を調整するだけで，積層材の「粘弾性挙動」を自由に調整出来ることを意味している。

上述の各例で示したように解析解の存在しない複雑な力学特性・幾何形状を有する実用工業材料の圧子力学挙動解明において有限要素法を用いた数値解析は極めて有用であり，ミクロ・ナノ領域における材料物理学の発展への貢献度は大きい。

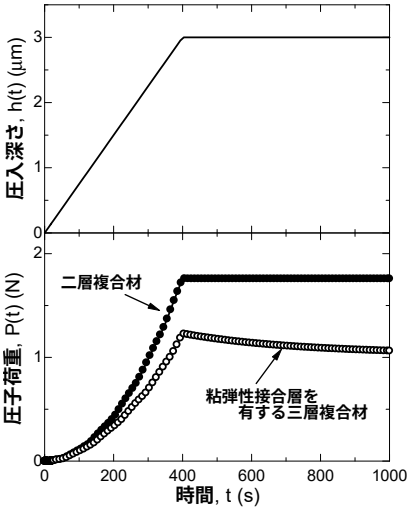


図 10.17 定速圧入後，$h = 3.0\,\mu\text{m}$ で圧子を保持した際に観測される圧子荷重の緩和挙動(FEM 数値解析結果)

●印:弾塑性被膜/弾性基材からなる二層積層材

○印：弾塑性被膜/粘弾性接合層/弾性基材からなる三層積層材

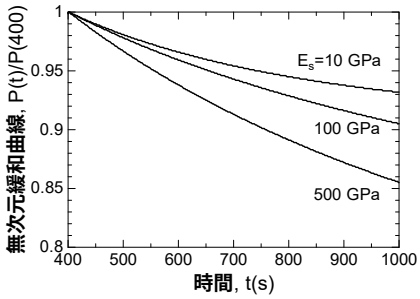


図 10.18 三層積層材の荷重緩和挙動に及ぼす基材弾性率 E_s の影響。図 10.17 と同様，時間 $t = 400$ s まで定速圧入後に観測される圧子荷重緩和をその初期荷重 $P(t = 400)$ を用いて規格化した無次元荷重緩和 $P(t)/P(t = 400)$ が時間($t \ge 400$ s)の関数としてプロットされている(FEM 数値解析結果)

11 圧子力学試験計測装置とデータ解析

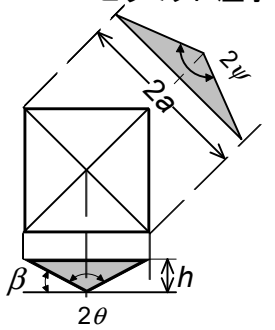
11.1 汎用ピラミッド圧子

圧子力学試験で多用されているピラミッド圧子(Vickers 圧子, Berkovich 圧子)の幾何形状を図 11.1 に示す。第 5 章(図 5.4)で述べた Brinell 圧子との幾何学的整合性を保つために，Vickers 正四面ピラミッド圧子の対面角度は $2\theta = 136^\circ$，面傾き角度は $\beta = 22.0^\circ$，対稜角度は $2\psi = 148.1^\circ$ に規定されている。一方，Berkovich 正三面ピラミッド圧子は Vickers 圧子と同一の排除体積(深さ h での圧子排除体積 V が両圧子形状で同一)となるように幾何形状が規定され，その結果，Berkovich 圧子の面傾き角度は $\beta = 24.7^\circ$，稜角度は $\psi = 77.1^\circ$ で与えられる。一方，圧子正射影面積 A は面積因子(index of projected area) g を用い $A = gh^2$ により圧子深さ h に関係づけられる。面積因子は，Vickers 圧子の場合 $g = 4\cot^2\beta$，Berkovich 圧子では $g = 3\sqrt{3}\cot^2\beta$ により表現できるので，それぞれの圧子の β 値を上式に代入することにより，両者共に同一の g 値($g = 24.5$)を得る。したがって，これら幾何形状を異にするピラミッド圧子の排除体積は両者共に $V\left(\equiv gh^3/3\right) = 8.17h^3$ により圧入深さ h に関係付けられ両ピラミッド圧子の排除体積同一性が認められる。

微小ダイヤモンド塊からピラミッド圧子を機械加工する際，圧子先端部の加工精度は圧子力学パラメータ計測データの信頼・精度を確保する上で本質的な影響を与える。特にナノ領域での計測($h \le 500$ nm)において圧子先端部加工精度の影響は大きくなる。ナノ領域圧子力学計測(ナノインデンテーション)において Vickers 圧子よりも Berkovich 圧子が広く用いられているのは，前者に比べ後者の圧子の方が圧子先端部鋭角度をより精度よく機械加工出来るためである。しかし，高精細な現在の機械加工技術を用いても圧子先端部鋭角度を厳密に再現できるわけではなく，市販のピラミッド圧子の先端部には曲率半径が約 100nm 程度の「丸み」が存在する。この先端部曲率がナノ計測に与える影響について Vickers/Berkovich 等価円錐圧子($\beta = 19.7^\circ$)を用いた有限要素法数値解析の結果を以下に示す。

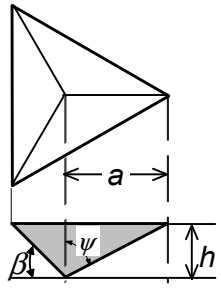
先端部に曲率半径 R_t の丸みを有する等価円錐圧子の幾何形状

(a) Vickers ピラミッド圧子



	β	ψ	2θ
Vickers	22.0°	74.05°	136.0°

(b) Berkovich ピラミッド圧子



	β	ψ
Berkovich	24.7°	77.1°

図 11.1 汎用ピラミッド圧子の幾何形状

(a) Vickers 圧子

(b) Berkovich 圧子

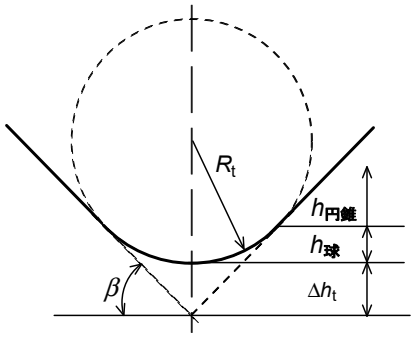


図 11.2 頂角部に曲率半径 R_t の丸みを有する Vickers/Berkovich 等価円錐圧子($\beta = 19.7^\circ$)の先端幾何形状

を図 11.2 に示す。$R_t = 100$ nm の場合，先端部欠損長は $\Delta h_t \left(= R_t(\sin\beta\tan\beta + \cos\beta - 1)\right) = 6.22$ nm，球圧子として近似できる領域寸法は $h_{球}\left(= R_t(1-\cos\beta)\right) = 5.85$ nm，したがって円錐圧子として表現出来る圧子形状領域は $h_{円錐} \geq 5.85$ nm により与えられる。この圧子を材料表面に圧入すると，その初期には，球形圧子として挙動し，圧入が進むにつれて，本来の円錐圧子としての挙動に遷移して行く。

弾性率 $E = 100$ GPa，ポアソン比 $\nu = 0.5$ の完全弾性体に，この圧子を圧入した際に観測される押し込み荷重 P と圧入深さ h との関係(P -hプロット)の有限要素数値解析結果を図 11.3 に示す。図から分かるように,「円錐圧子」を仮定した解析には $h \leq 150$ nm の領域で有意な誤差を伴う可能性に留意しなければならない。圧子頂角部に曲率半径 100nm 程度の球形部位を有する汎用の市販 Vickers/Berkovich 圧子を用いたナノインデンテーション計測データの解析においても，これと類似の誤差が生じることに注意を払う必要がある。換言すると，ナノ領域における圧子力学計測精度を高めるためには，実際の計測で用いる個々の圧子について，それぞれの頂角部曲率を圧子力学試験に先立ち定量評価しておく必要がある。しかしながら，後節(第 11.3 節)で詳述する「顕微インデンテーション計測装置」とは異なり, 汎用の計装化装置は第 11.2 節で詳述するように圧入荷重 P と圧入深さ h の計測(P -h曲線の計測)は可能であるが，接触深さ h_c や圧子接触面積 A_c を直接計測することは不可能である。このため，たとえ頂角部幾何形状を厳密に定量できたとしても，以下に詳述するように，実測された P -h曲線から各種の圧子力学物性値を定量計測するには多くの仮定や近似を用いる必要が生じる。

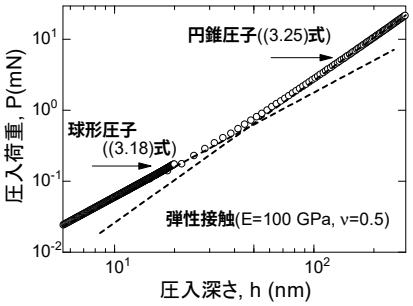


図 11.3 頂角部に半径 $R_t = 100$ nm の曲率を有する Vickers/ Berkovich 等価圧子円錐圧子を完全弾性体 ($E = 100$ GPa，ポアソン比 $\nu = 0.5$) に圧入した際に観測される P -h 両対数プロット。○印は有限要素数値解析結果，破線は球形圧子，円錐圧子それぞれの理論関係式（(3.18)式，(3.25)式）

11.2 汎用計装化インデンテーション計測装置

ミクロ・ナノ領域での力学物性を定量計測するための計装化インデンテーション計測装置の開発は 1980 年代に始まる**[11.1-11.3]**。汎用計測装置の基本構造(圧入変位駆動器，圧入荷重計測器，圧入変位計測器，圧入変位・荷重伝達軸，装置躯体)を図 11.4 に示す。変位駆動器としてはピエゾ駆動方式あるいは電磁駆動方式が汎用計測機では広く用いられている。荷重計測器には分解精度±0.5μN のひずみゲージ搭載ロードセル，変位計測器には分解精度±0.1nm

[11.1] M.K. Shorshorov, S.I. Bulychev, V.A. Alekhim, *Sov. Phys. Doki.*, **26**, 769 (1981)

[11.2] D. Newey, M.A. Wilkins, H.M. Pollock, *J. Phys.* **E15**, 119 (1982)

[11.3] J.B. Pethica, R. Hutchings, W.C. Oliver, *Phil. Mag.*, **A48**, 593 (1983)

の作動トランスあるいは静電容量型変位計が汎用計測装置では広く採用されている。

図 11.4 に示すように，変位計測器と試料との相対的位置関係により，計測装置を(a)「躯体基準相対圧入変位計測装置」と(b)「試料保持台基準絶対圧入変位計測装置」の二つのタイプに分類することができる**[10.4, 11.4-11.6]**。前者(相対変位計測型)は，試料周辺部に変位計測器が存在しないため試料を高温・低温に，あるいは腐食環境に保持する炉・容器等を設置出来る利点がある一方で，装置躯体や変位・荷重伝達軸の変形が計測される圧入変位に影響を与えてしまう致命的欠点がある。躯体・伝達軸の変形はミクロ・ナノ領域での試験体弾性率や，粘弾性関数の定量評価に極めて深刻な影響を与えるため，相対変位計測型装置では，これらの弾性変形(躯体変形)を装置定数として試験に先立ち定量的に決定しておく必要がある。一方, 後者(絶対変位計測型)は試験躯体等の変形が実測圧入変位に影響を与えないため，試験体弾性率等を定量的に決定できる半面，変位計測器を試料近傍に設置する必要があるため低・高温雰囲気あるいは腐食環境下での圧子力学計測を困難にしてしまう短所がある。絶対圧入変位計測方式を採用している場合においても試料と試料保持台とが相互に完全密着するように試料を保持台に固定することが特にナノ定量計測においては極めて重要な要件となる。

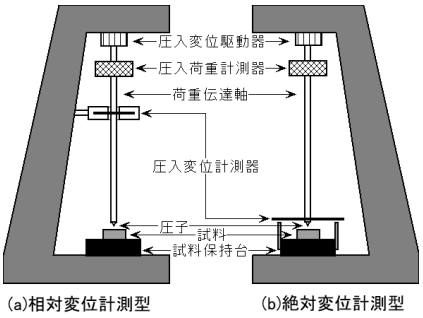


図 11.4 計装化インデンテーション計測装置構成図：
(a) 装置躯体基準相対圧入変位計測装置,
(b) 試料保持台基準絶対圧入変位計測装置

(1) 装置定数の実験的決定方法

圧子圧入時に生じる装置躯体部の弾性変形は先に述べたように試験体の弾性率および粘弾性関数の計測値に極めて重大な影響を与える。したがって装置躯体部弾性変形(躯体コンプライアンス；frame compliance)を装置定数として予め定量しておく必要がある。

計装化計測装置により実測される圧入深さを h_{obs} ,「完全弾性体試料」に生じている実際の圧入深さを h，その際の圧入荷重を P とすると次式の関係が存在する；

$$h_{\mathrm{obs}} = C_{\mathrm{obs}} P \qquad h_{\mathrm{obs}} = h + h_{\mathrm{f}} \tag{11.1}$$

上式で h_{f} は装置躯体部(frame)の弾性変形を意味し，C_{obs} は計測機により「実測」される弾性コンプライアンスとして定義される。一方，$h = CP$，$h_{\mathrm{f}} = C_{\mathrm{f}} P$ を用いて弾性体試料および試験装置躯体部それぞれの弾性コンプライアンス C および C_{f} を定義すると，こ

[11.4] G.M. Pharr, R.F. Cook, *J. Mater. Res.*, **5**, 847 (1990)
[11.5] M. Sakai, *Acta. Metall. Mater.*, **41**, 1751 (1993)
[11.6] M. Sakai, S. Shimizu, T. Ishikawa, *J. Mater. Res.*, **14[4],** 1471 (1999)

れらの関係式を(11.1)式に代入することにより，実測される弾性コンプライアンス C_{obs} は試験装置躯体部コンプライアンス C_{f} を介して次式により試料コンプライアンス C に関係付けることが出来る；

$$C_{\mathrm{obs}} = C + C_{\mathrm{f}} \tag{11.2}$$

実際，市販されている多くの汎用計装化試験装置の躯体コンプライアンスの値は $C_{\mathrm{f}} \approx 200$ nm/N 程度であることが知られている。

計装化インデンテーション計測装置により計測される弾塑性試験体の圧子圧入-徐荷曲線(P - h負荷徐荷履歴曲線)を模式的に図 11.5 に示す。徐荷曲線は徐荷に伴う試験体および装置躯体部の「弾性回復」を反映しており，最大圧入深さ($h_{\max}$)での徐荷曲線の初期勾配 S_{obs} (徐荷スティフネス; $(dP/dh)_{h_{\max}}$)と上記の弾性コンプライアンス C_{obs} との間には逆数の関係，すなわち，$S_{\mathrm{obs}} = 1/C_{\mathrm{obs}}$ の関係が存在する。一方，$C = dh/dP$ の関係を完全弾性体の構成式である(3.33)式および(3.34)式に適用することにより，円錐圧子および球圧子を含む任意形状を有する軸対称圧子について次式を得る **[9.4]**；

$$C_{\mathrm{obs}}\left(\equiv 1/S_{\mathrm{obs}}\right) = C_{\mathrm{f}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2E'}\frac{1}{\sqrt{A_{\mathrm{c}}}} \tag{11.3}$$

上式で A_{c} は最大荷重点 $P_{\max}$ での圧子接触面積を表す。一方，充分に大きな圧入領域では，機械加工精度に起因する圧子頂角部の欠損を無視できるので，(11.3)式の接触面積 A_{c} は面積因子 g (Vickers/Berkovich 圧子の場合，$g = 24.5$)を介して $A_{\mathrm{c}} = gh_{\mathrm{c}}^{2}$ により圧子接触深さ h_{c} に関係付けられる。さらに，圧子接触深さ h_{c} は $h_{\mathrm{c}} = \eta_{\mathrm{c}} h_{\max}$ により実測可能な最大圧入深さ $h_{\max}$ に関係付けられる(相対接触深さ η_{c}: 塑性歪 $\varepsilon_{\mathrm{I}}E'/cY$ により規定される材料定数；図 5.6 参照)。これらの関係式を(11.3)式に代入することにより最終的に実測可能な $C_{\mathrm{obs}}\left(\equiv 1/S_{\mathrm{obs}}\right)$ と実測可能な $h_{\max}$ との間に成立する次式を得る；

$$C_{\mathrm{obs}}\left(\equiv 1/S_{\mathrm{obs}}\right) = C_{\mathrm{f}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2E'}\frac{1}{\sqrt{g}\eta_{\mathrm{c}}}\frac{1}{h_{\max}} \tag{11.4}$$

上述した試験装置躯体コンプライアンス C_{f} を実験的に求める操作手順の妥当性を検証するため，モデル弾塑性体(弾性率 $E = 100$ GPa，降伏応力 $Y = 10$ GPa，ポアソン比 $\nu = 0.3$)を用い，さらに，図 11.2 に示した頂角部に曲率半径 $R_{\mathrm{t}} = 100$ nm を有する

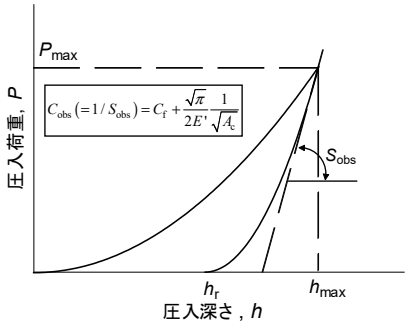


図 11.5 弾塑性体の負荷徐荷に伴う P - h履歴曲線。徐荷曲線の初期勾配 S_{obs} の逆数として弾性コンプライアンス C_{obs} を実験的に求めることができる

Vickers/Berkovich 等価円錐圧子，および試験装置躯体部コンプライアンス $C_f = 200$ nm/N を想定した圧子力学試験の有限要素数値解析を行い，上記の操作手順に則り試験装置コンプライアンス C_f を決定するために作成した C_{obs} - $1/h_{max}$ 直線プロットを図 11.6 に示す。グラフの切片から求めた躯体部コンプライアンス C_f および直線プロットの勾配から求めた弾性率 E' の値が，それぞれ，数値解析に当たって想定したそれぞれの値と良く一致していることが確認出来る。換言すると，汎用計測装置および汎用ピラミッド圧子を用い実験で求めた C_{obs} - $1/h_{max}$ 直線プロットから，躯体部コンプライアンス C_f を装置定数として実験的に決定できることを図 11.6 は示している。

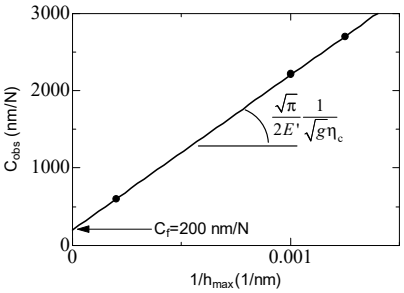


図 11.6 装置定数 C_f を実験的に決定するために作成した C_{obs} - $1/h_{max}$ 直線プロット(有限要素数値解析結果)

【試験装置躯体コンプライアンス C_f を実験的に求める実験操作手順】

(1) 脆性セラミックスに代表される弾性率の大きな材料を用い「充分に大きな圧入領域($h \geq 500$ nm)」において，3～4 の異なる最大圧入深さ h_{max} に対し，それぞれの P - h負荷徐荷履歴曲線を測定し，徐荷曲線初期勾配から $C_{obs}\left(\equiv 1/S_{obs}\right)$ を求める。この際に弾性率の大きな材料を試験体として用いることにより装置躯体の弾性変形を有意に強調することが出来るため C_f の実測精度を高めることが出来る

(2) **(1)**で求めた，それぞれの圧入深さでの C_{obs} を $1/h_{max}$ に対してグラフ上に直線プロットし，グラフの切片から C_f を決定する

＊)弾性率 E' が既知である標準試料(標準試料としては，溶融シリカガラスが広く用いられている)を試験体として用いると，上述の操作により得られる直線プロットの勾配($=\sqrt{\pi}\Big/\left(2E'\sqrt{g}\eta_c\right)$)から η_c を決定し， $h_c = \eta_c h_{max}$ の関係を利用することにより，圧子接触深さ h_c ，ひいては圧子接触面積 A_c を h_{max} に関連付けることも可能となる

一方，圧子頂角部曲率半径 R_t の影響を定量的に見積もるため，上記有限要素数値解析結果から得られた徐荷コンプライアンス $C\left(\equiv C_{obs} - C_f\right)$ と圧入深さ h_{max} の両対数プロットを図 11.7 に示す。徐荷コンプライアンスが圧子徐荷時の弾性回復を反映する物理量であることに留意すると，(3.18)式，(3.25)式より球形圧子領域では $C \equiv (dh/dP) \propto 1/h_{max}{}^{1/2}$，円錐圧子領域では $C \propto 1/h_{max}$ の関係が存在する。事実，図 11.7 の両対数プロットに示すように，円錐圧子領域では勾配 -1 の直線，球形圧子領域では勾配 -1/2 の直線が確認される。図 11.7 の斜線領域（$10\text{nm} \leq h_{max} \leq 60\text{nm}$）に円錐圧子/

球形圧子遷移境界域の存在がうかがえる。この結果は有限要素解析で用いたモデル圧子先端部半径(曲率半径 $R_t = 100$ nm；$h_{球}\left(= R_t(1-\cos\beta)\right)$=5.85nm (図 11.2 参照))を反映したものである。

上述の有限要素解析結果が示すように，一般的な弾塑性試験体においても，予め装置定数としての躯体コンプライアンス C_f を定量しておけば，汎用計測装置で計測可能な物理量である徐荷コンプライアンス $C\left(\equiv C_{obs} - C_f\right)$ と圧入深さ h_{max} を両対数プロットすることにより，図 11.7 で示したように，汎用ピラミッド圧子の頂角部曲率半径を実験的に定量評価することができる。また走査プローブ顕微鏡(scanning probe microscope)を用いた圧子頂角部観測の併用により圧子頂角部曲率半径の定量精度をさらに高めることも可能である。

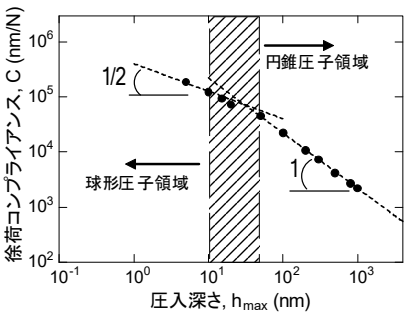


図 11.7 徐荷コンプライアンス $C\left(\equiv C_{obs} - C_f\right)$ と圧入深さ h_{max} の両対数プロット(弾性率 $E = 100$ GPa，降伏応力 $Y = 10$ GPa，ポアソン比 $\nu = 0.3$ で与えられるモデル弾塑性体を用いた有限要素数値解析結果)

(2) 弾塑性力学物性の定量

上述した一連の操作により圧子先端形状の確定および装置定数の定量を完了した後には任意の弾性・弾塑性体の圧子圧入荷重 P と圧入深さ h の関係，すなわち P -h 履歴曲線，をミクロ・ナノ領域で厳密に定量測定することが可能となる。この P -h 履歴曲線の解析から Meyer 硬度 H_M，弾性率 E' および降伏応力 Y 等の弾塑性力学物性値を定量評価するわけであるが，前述したように，汎用計測装置では圧子接触面積 A を直接計測することができないため，これら力学物性値の定量においては各種の近似，仮定，あるいは有限要素数値解析により求めた「検量線」を併用する必要があり，結果的に得られる各種の弾塑性物性値には常に不確実な要因が含まれてしまう。

【実測 P - h 履歴曲線から弾塑性物性値を定量するための操作手順】

ピラミッド圧子を用いて実測した P -h履歴曲線から弾塑性物性値を定量する際の操作手順(フローチャート)を図 11.8 に示す。最も重要となる計測値はフローチャートの図 1 および図 2 に示した最大圧入深さ $h_{\max}$，塑性変形の情報を有する徐荷後の残留圧痕深さ h_{r}，弾塑性変形の情報を提供する負荷曲線勾配 k_1，そして弾性変形に起因する徐荷曲線勾配 k_2 である。

(1) 先ず，計測で得られた無次元圧痕深さ $h_{\mathrm{r}}/h_{\max}$ をフローチャートの図 3(有限要素数値解析，図 10.9 参照)の縦軸に適用し，その横軸から塑性歪 $PI(=\varepsilon_{\mathrm{I}}E'/cY)$を求める。

(2) 同様に，実測された $h_{\mathrm{r}}/h_{\max}$ を図 4(図 10.10 参照)のグラフ横軸に適用し，その縦軸から無次元圧子接触深さ $h_{\mathrm{c}}/h_{\max}$ を決定する。図 4 を用いグラフ操作で $h_{\mathrm{r}}/h_{\max}$ から $h_{\mathrm{c}}/h_{\max}$ を決定する代わりに，Oliver-Pharr 弾性近似式((10.8)式)を用いることもできる。

(3) 上記(2)項で求めた圧子接触深さ h_{c} を $a_{\mathrm{c}}=h_{\mathrm{c}}\cot\beta$ に代入することにより円錐圧子接触半径 a_{c}，さらには接触面積 $A_{\mathrm{c}}\left(=\pi a_{\mathrm{c}}^2\right)=\left(\pi\cot^2\beta\right)h_{\mathrm{c}}^2$ を求めることができる。このようにして求めた A_{c} と実測された最大圧入荷重 $P_{\max}$ を次式に代入し，Meyer 硬度を算出・決定する；

$$H_{\mathrm{M}}\left(\equiv P_{\max}/A_{\mathrm{c}}\right)=\left(P_{\max}\tan^2\beta\right)\Big/\pi h_{\mathrm{c}}^2 \qquad (11.5)$$

(4) 第(1)項の操作で求めた塑性歪 PI を図 5(図 10.7 参照)，図 6(図 10.8 参照)の横軸に適用し，これらの対応する縦軸の値より，それぞれ，k_1/Y と k_2/E' を決定する。k_1 および k_2 の値は，すでに図 2 で実測・作図した $P-h^2$ プロットの負荷および徐荷直線の勾配として実測・決定されているので，これらの値より弾塑性試験体の弾性率 E' と降伏応力 Y を算出する。

(5) 図 3 の操作で求めた PI を図 5.3 の横軸に適用し，対応する縦軸の無次元硬度 H_{M}/cY の値と上記**(3)**項の操作ですでに求めておいた H_{M} および**(4)**項で求めた Y の値から拘束因子 c を決定する。

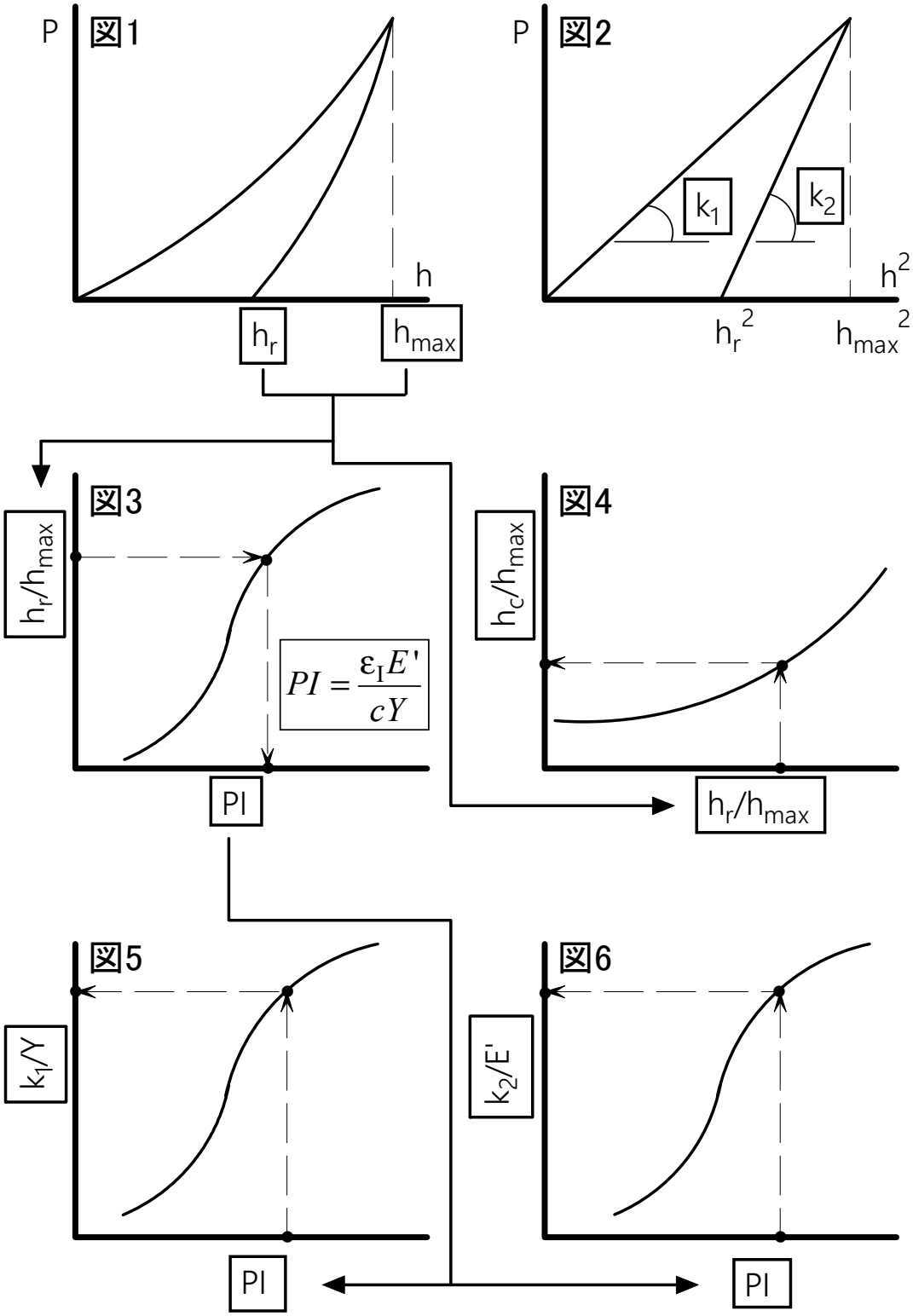


図 11.8 実測された P - h曲線から弾塑性物性値を定量するための操作フローチャート

(3) 粘弾性関数の定量

第 7 章で詳述したように粘弾性関数（緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$，クリープコンプライアンス $C'_{\mathrm{creep}}(t)$）の計測・定量に接触面積 $A(t)$ の実測は不可欠である。しかし，現在利用可能な市販の計装化装置では実測される圧入深さ $h(t)$ から $A(t)$ を推算する以外には，これらの粘弾性関数を実験的に求めることができない。しかも推算の基礎となる仮定・近似の信頼性・精度には多くの問題が山積しており，結果として得られた粘弾性関数は定量的というよりは，むしろ定性的な物性関数として位置付けておく必要がある。

度々述べてきたように幾何相似性を有する円錐圧子・ピラミッド圧子と異なり，平端円柱圧子や球形圧子の場合，圧子歪 ε_{I} が圧入深さや接触面積に依存するため時間依存性を有する粘弾性現象の定量においては実測データの解析を不要に複雑としてしまう。このため，第 7 章と同様に本章においても円錐圧子に焦点を絞って粘弾性解析の考察を進める。円錐圧子に関する粘弾性構成方程式（(7.3)式）を再度下記する；

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \frac{\tan\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{dA(t')}{dt'}dt' \\
A(t) &= 2\cot\beta\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt'
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

汎用計装化試験装置では接触面性 $A(t)$ の実測が不可能であるため，本章では圧入深さ $h(t)$ を用いた次式により(7.3)式を再表現しておく；

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \frac{\pi\cot\beta}{2}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{d\left\{\eta_{\mathrm{c}}^2(t')h^2(t')\right\}}{dt'}dt' \\
\eta_{\mathrm{c}}^2(t)h^2(t) &= \frac{2\tan\beta}{\pi}\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt'
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

ここに $\eta_{\mathrm{c}}(t)=h_{\mathrm{c}}(t)/h(t)$ により定義される相対圧子接触深さ $\eta_{\mathrm{c}}(t)$ は，完全弾性体の場合には，時間依存性を持つことなく常に $\eta_{\mathrm{c}}=2/\pi$ ((3.28)式参照)，また(10.8)式および図 10.10 に示すように，弾塑性体の場合にも時間依存性を有しない材料定数である。一方，粘弾性体においては幾何相似性を特徴とする円錐圧子を用いても，(11.6)式に見るように相対接触深さ $\eta_{\mathrm{c}}(t)$ が時間に依存性することを考慮する必要がある。一例として，Vickers/Berkovich 等価円錐圧子を時間 $t=0$ で $h(0)=3\,\mu\mathrm{m}$ までステップ圧入した際に生じる荷重緩和挙動に伴って観測された時間依存相対圧子接触深さ

$\eta_c(t)$ (有限要素数値解析結果)を図 11.9 に示す。非圧縮性粘弾性体（$\nu(0)=0.5$）の場合は完全弾性体と同様，$\eta_c(t)$ は時間依存性を示すことなく常に $\eta_c(t)\equiv 2/\pi$ により与えられる。しかし，$\nu(0)<0.5$ で与えられる一般的な圧縮性粘弾性体においては，たとえステップ圧入により時間に依存しない一定の圧入深さ $h(t)\equiv 3$ μm を保持しているにもかかわらず圧子接触深さ $\eta_c(t)$ は荷重緩和に伴い単調増大する。このことは，ステップ圧入にもかかわらず，圧子に直接接触している試験体自由表面が円錐圧子の側面に沿って時間と共に「せり上がる(creeping-up)」ことを意味している。

汎用計装化インデンテーション計測装置では時間依存性を示す $h_c(t)$，さらには，$\eta_c(t)$ を実測することが出来ない。このため，(11.6)式で示した構成方程式を用いて粘弾性関数を定量することができず，やむなく，$\eta_c(t)$ を時間に依存しない一定値，$\eta_c(t)\equiv 2/\pi$，と仮定する近似(弾性近似)を採用せざるを得ないのが現状である。この弾性近似を採用し，(11.6)式を次式で再表現することにより，実測データ，$P(t)$，$h(t)$，から粘弾性関数を「近似解」として求める必要がある；

$$P(t)=\frac{2\cot\beta}{\pi}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')\frac{d\left\{h^2(t')\right\}}{dt'}dt'$$
$$h^2(t)=\frac{\pi\tan\beta}{2}\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')\frac{dP(t')}{dt'}dt' \qquad (11.7)$$

(i) *ステップ圧入試験*

第 7 章においては，圧子接触面積を用いた粘弾性厳密解析を論じた。これに類似した解析を弾性近似式である(11.7)式に適用し，圧入深さ h_0 へのステップ圧入試験

$$h(t)=h_0u(t) \qquad (11.8)$$

で観測される圧子荷重緩和 $P(t)$ を

$$P(t)=\frac{2h_0^{\,2}\cot\beta}{\pi}E'_{\mathrm{relax}}(t) \qquad (11.9)$$

に適用し緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ が算出できる。一方，圧入荷重 P_0 へのステップ圧入荷重試験

$$P(t)=P_0u(t) \qquad (11.10)$$

で観測される圧入クリープは

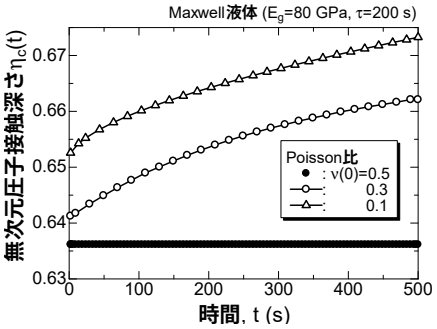


図 11.9 緩和弾性率が

$$E_{\mathrm{relx}}(t)=E_{\mathrm{g}}\exp(-t/\tau)$$

(E_g=80GPa，τ=200s)で与えられる Maxwell 液体の荷重緩和（ステップ圧入試験）に伴い観測される相対圧子接触深さ $\eta_c(t)$ の時間依存挙動とポアソン効果(有限要素数値解析結果)

$$h^2(t) = \frac{\pi P_0 \tan\beta}{2} C'_{\mathrm{creep}}(t) \tag{11.11}$$

によりクリープ関数$C'_{\mathrm{creep}}(t)$に関係付けられる。したがって，これらのステップ圧入試験を行うことにより，緩和荷重$P(t)$から緩和弾性率を，圧入クリープ$h^2(t)$からクリープコンプライアンス$C'_{\mathrm{creep}}(t)$を実験的に定量できる。しかし，(11.7)式の導出に当たり図 11.9 に示した荷重緩和時に生じる相対接触深さ$\eta_{\mathrm{c}}(t)$の時間依存性を無視したことに加え，装置コンプライアンスの影響を受ける試験装置を用いている場合には，圧入深さh_0へのステップ圧入試験といえども，荷重緩和$P(t)$に伴って生じる装置躯体部の弾性回復(＝$C_{\mathrm{f}}P(t)$)のため，試験体に付加される圧子圧入量$h(t)$は次式で示すように時間と共に単調増大する。

$$h(t) = h_0 - C_{\mathrm{f}}P(t) \tag{11.12}$$

この結果, (11.9)式から求まる<u>緩和弾性率を規定している緩和時間τを著しく過大評価してしまう</u>ことに留意しなければならない。一方，一定圧入荷重，$P(t) = P_0 u(t)$へのステップ圧入で観測されるクリープ変形や次項で述べる定速圧入試験，$h(t) = k_h \cdot t$あるいは$P(t) = k_p \cdot t$，で観測される「<u>時間と共に単調増大</u>を示す粘弾性現象」，すなわち，「<u>荷重の緩和を伴わない</u>粘弾性現象」の解析においては, 上述した装置躯体部コンプライアンスC_{f}に起因した問題は生じない。しかし，荷重緩和現象を伴わない粘弾性変形においても，上述したように, 無次元接触深さ$\eta_{\mathrm{c}}(t)$は時間依存性を有するため，<u>$\eta_{\mathrm{c}}(t) \equiv 2/\pi$と仮定することにより導出された(11.7)式を用いた上述の粘弾性解析には，依然とて，得られた粘弾性関数の精度・信頼性に深刻な問題が存在する。</u>

(ii) *定速圧入試験*

定速圧子圧入試験

$$h(t') = k_h t' \tag{11.13}$$

および，定速圧入荷重試験

$$P(t') = k_P t' \tag{11.14}$$

の場合，これらの試験条件を<u>弾性近似</u>（$\eta_{\mathrm{c}}(t) \equiv 2/\pi$）の仮定に基づき導出した(11.7)式に代入することにより次式を得る；

$$P(t)=\frac{4k_h{}^2\cot\beta}{\pi}\int_0^t E'_{\mathrm{relax}}(t-t')t'dt'$$
$$h^2(t)=\frac{\pi k_P\tan\beta}{2}\int_0^t C'_{\mathrm{creep}}(t-t')dt' \qquad (11.15)$$

(11.15)式に Laplace 変換・逆変換を適用し，最終的に緩和弾性率およびクリープコンプライアンスに関する次式を得る；

$$E'_{\mathrm{relax}}(t)=\frac{\pi\tan\beta}{4k_h{}^2}\frac{d^2P(t)}{dt^2}$$
$$C'_{\mathrm{creep}}(t)=\frac{2\cot\beta}{\pi k_P}\frac{d\left\{h^2(t)\right\}}{dt} \qquad (11.16)$$

したがって実測された圧子荷重 $P(t)$ あるいは圧入深さ $h^2(t)$ に時間微分操作を施すことにより粘弾性関数を定量することができる。

11.3 計装化顕微インデンテーション計測装置

ミクロ・ナノ領域で各種の力学物性(弾性, 弾塑性, 粘弾性, ・・・)を計測・定量する上で圧子力学の果たす役割と有用性について，繰り返し，その重要性を論じてきた。これら力学物性を記述する圧子力学構成方程式の基礎を与える刺激応答理論では，力学的な刺激としての圧入荷重 P に対する応答としての圧子接触面積 A，あるいは, 刺激としての A に対する応答としての P が構成方程式の中核となることも繰り返し強調してきた(第 3 章，第 5 章，第 7 章，および第 8 章参照)。しかし，前節((11.2 節))で述べたように，現在利用可能な汎用計装化インデンテーション計測装置では圧入深さ hを定量計測することはできるものの接触面積 A を実測出来ないという圧子力学試験上，致命的な欠陥を有しているため，各種の仮定や近似を用いることにより力学物性値の定量を行わざるを得ないのが実情である。一方，本節で述べる「計装化顕微インデンテーション計測装置」は圧子荷重 P，圧入深さ hに加えて，P あるいは hの関数として圧子接触面積 A を実測定量することができる。このため**上述した仮定・近似を一切用いることなく各種力学物性値の定量評価が可能となる。**

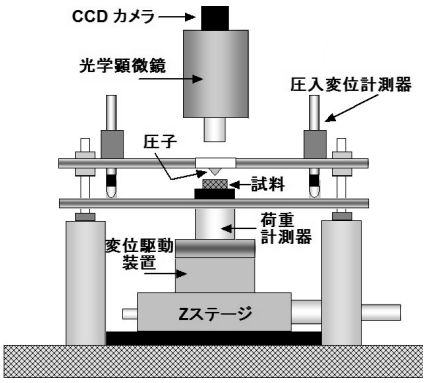


図 11.10 計装化顕微インデンテーション計測装置の基本構成図

(1) 装置の基本構造と計測原理[11.7 - 11.9]

計装化顕微インデンテーション計測装置の基本構成を図 11.10 に示す(図が煩雑になることを避けるため，図 11.10 では，光源等の光学系に関わる構成要素の描写が省略されている)。圧子と試験

[11.7] T. Miyajima, M. Sakai, *Phil. Mag*, **86[33-35]**, 5729 (2006)
[11.8] M. Sakai, N. Hakiri, T. Miyajima, *J. Mater. Res*., **21[9]**, 2298 (2006)
[11.9] 羽切教雄, 逆井基次, 宮島達也, *材料*, **56[6]**, 510 (2007)

体接触部の光学像は顕微鏡を介し CCD カメラでデジタル化した後コンピュータに取り込まれる。圧子/試験体接触部位の光学画像計測に採用されている光学経路(暗視野法(dark field method)，明視野法(bright field method))を図 11.11 に示す。図に示すように，光学像を観測するための入射光および圧子接触部位からの反射光を共に圧子内部を透過させる必要がある。このため，用いる可視光に対して圧子の透明性が確保されなければならない。大気下(酸化性雰囲気)での計測においては，測定温度が 300℃以下の場合には，ダイヤモンド圧子が，さらに高温(300℃～1200℃)での計測にはサファイア圧子が用いられる。図 11.10 に示した計測装置では，変位駆動装置(ピエゾ素子を用いた駆動装置)に直列装着された試験体が装置躯体部に固定された圧子に対して下部より圧入される。圧入荷重 P は試験体下部に直列配置された荷重計測装置(ひずみゲージを装着したロードセル)により，また，圧入深さ hは静電容量型あるいは作動トランス型変位計測器により検出される。後にその詳細を述べるが，顕微インデンテーション計測装置を用いて各種の力学物性量を計測する場合，接触面積の定量計測が可能であるため圧入深さ h の測定は不要となる。しかし，汎用の計装化インデンテーション計測装置で実測される P - h曲線と顕微インデンターで求めた値との比較・整合性確認の必要性から，変位計測器も装着されている。また，実測された圧入荷重 P と圧子接触面積 A （P - A 曲線)から各種力学物性量の定量を行うことが可能となるため，換言すると圧入深さ h の測定が不要となるため，第 11.2(1)節で述べた装置定数としての装置躯体コンプライアンス C_{f} の定量は，これを一切必要としない。

コンピュータに取り込まれた圧子接触部位のデジタル画像データは二値化された後に接触面積 A の値に変換され，対応する圧入荷重 P , 圧入深さ h , 時間 t と共にハードディスクに収納される。顕微インデンターで計測された圧子接触画像の例として, 図 11.12 に Berkovich 圧子をポリカーボネートに圧入した際の光学画像(明視野像)とその二値化像を示す。このようにして計測された接触面積 A の値を，遂次，圧子圧入駆動部に電気信号としてフィードバックすることにより，試験体に付加する接触面積を時間の関数として制御することもできる。例えば，時間依存・刺激付加速度依存性を有する粘弾性力学応答において，時間と共に接触面積を定速増大させる圧入試験($A(t) = k_A t$)や, 一定の接触面積 A_0 をステッ

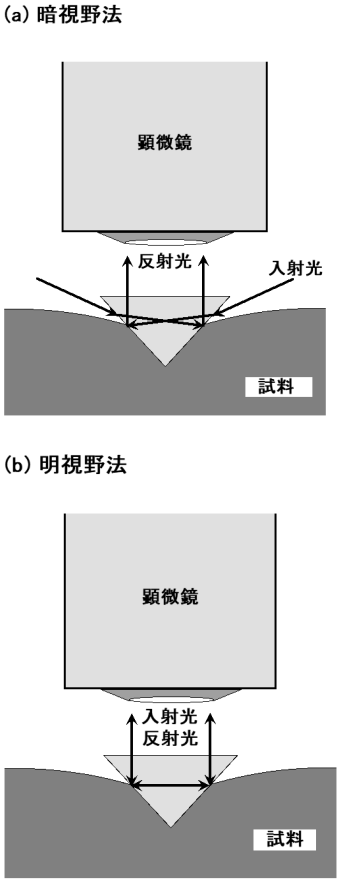


図 11.11 圧子接触部位光学画像計測に使われる入射光・反射光の光学経路：
(a)暗視野法，(b)明視野法

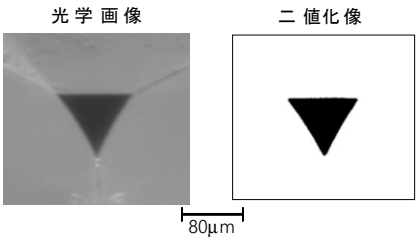


図 11.12 顕微インデンターにより計測された Berkovich 圧子/ポリカーボネート接触面の光学画像と，その二値化画像

プ付加することにより観測される荷重緩和から緩和弾性率を定量計測する試験等々においては接触面積のフードバック制御が不可欠となる。時間依存性を示さない弾性・弾塑性領域においては一定圧入深さ h_0 へのステップ圧入 $h(t)=h_0u(t)$ により一定圧子接触面積 A_0 へのステップ圧入 $A(t)=A_0u(t)$ を実現することが可能となるが，図 10.14 および図 11.9 に例示したように，粘弾性体にステップ圧入 $h(t)=h_0u(t)$ を付加した場合，時間依存ポアソン効果により荷重緩和に伴い接触面積が単調増大する。このため，上述のフィードバック制御を行わない限り粘弾性体の圧子接触面積を一定値 A_0 に保持することは出来ない。

(2) 弾塑性力学物性の定量

計装化顕微インデンテーション計測装置を用いることにより弾塑性体の圧子圧入荷重 P と接触面積 A との関係，すなわち，P - A 曲線の実測が可能となり，下記するように，実測データから直接，**何らの仮定や近似を用いることなく**，弾性率 E' や降伏応力 Y を厳密に定量することが可能となる。図 11.13 に顕微インデンターにより実測された石英ガラスおよび窒化ケイ素セラミックの P - A 曲線（Vickers 圧子），および有限要素数値解析により得られたモデル弾塑性体の P - A 曲線（Vickers/Berkovich 等価円錐圧子）を例示する。ピラミッド圧子・円錐圧子を用いた場合，圧子形状の幾何相似性により，図に示したように負荷時のみならず徐荷時も弾塑性領域での P - A プロットは直線で表現できる。負荷直線の勾配は(5.1b)式より Meyer 硬度 H_{M} そのものを表している。一方，弾性回復を反映している P - A 徐荷直線の勾配 $M\left(\equiv \varepsilon_{\mathrm{I}}E'\right)$ (徐荷モジュラス)は弾性体の Meyer 硬度を表しており，ピラミッド圧子・円錐圧子の場合，(5.2)式に $\varepsilon_{\mathrm{I}}=\tan\beta/2$ を代入することにより

$$M=\frac{\tan\beta}{2}E' \tag{11.17}$$

の関係を介し試験体の弾性率 E' に直接関係付けられる。このようにして徐荷モジュラス M から弾性率 E' を容易に決定することができる。また，第 5 章で詳述した「排除体積加成則理論，(5.13a)式」をピラミッド・円錐圧子に適用することにより得られる関係式

$$\frac{1}{(cY)^{3/2}}=\frac{1}{H_{\mathrm{M}}{}^{3/2}}-\frac{1}{M^{3/2}} \tag{11.18}$$

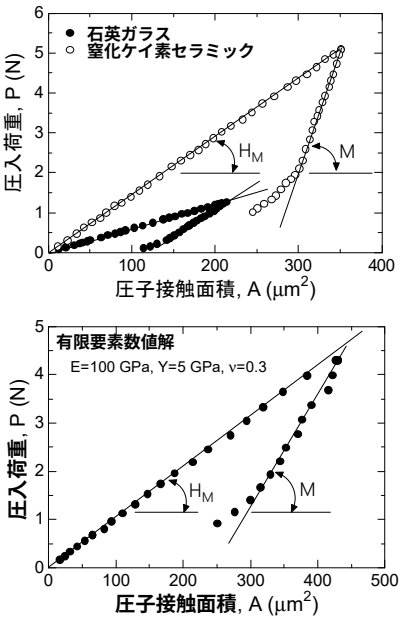


図 11.13 上図：計装化顕微インデンターにより求めた石英ガラスおよび窒化ケイ素セラミックの P - A 曲線。下図：有限要素数値解析で求めた弾塑性体の P - A 曲線(弾性率： $E'=100$ GPa，降伏応力： $Y=5$ GPa)

の右辺に，P - A 直線プロットの負荷・徐荷直線勾配から，それぞれ得られる，H_{M} および M を代入することにより，降伏応力 cY を得る。さらに，このようにして求めた M と cY の値を

$$PI\left(\equiv \varepsilon_I E'/cY\right) = M/cY \tag{11.19}$$

の関係式に代入することにより，注目している弾塑性体の「塑性歪(塑性変形能) PI 」(第 5 章参照)を顕微インデンターの実測データから直接決定することもできる。

(3) 粘弾性関数の定量[7.5]

弾性-粘弾性対応原理(第 6 章参照)を(5.13a)に適用することにより，ピラミッド・円錐圧子に関する圧子接触面積を用いた粘弾性圧子力学構成式は次式を用いて表現できる；

$$A_{\mathrm{ve}}(t)^{3/2} = A(t)^{3/2} - A_{\mathrm{p}}\left(t\right)^{3/2} \tag{11.20}$$

したがって粘弾性関数を実験的に定量評価するためには，計装化顕微インデンテーション計測装置により実測される圧子接触面積 $A(t)$ から(11.20)式を用いて塑性変形接触面積 $A_{\mathrm{p}}\left(t\right)$ の影響を取り除いた粘弾性圧子接触面積 $A_{\mathrm{ve}}(t)$ を以下の計測・解析操作により予め求めておかなければならない：

(1) 先ず粘弾性流動の無視できる「高速」圧子圧入・徐荷試験(速度依存性・時間依存性の認められない P - A 負荷徐荷試験)を行い，上記**(2)**項で述べた手順に則り降伏応力 cY を決定する。

(2) この cY 値を $A_{\mathrm{p}}(t) = P(t)/cY$ の関係式に代入し塑性接触面積 $A_{\mathrm{p}}(t)$ を求める。

(3) (11.20)式から得られる

$$A_{\mathrm{ve}}(t) = \left\{A(t)^{3/2} - \left[P(t)/cY\right]^{3/2}\right\}^{2/3} \tag{11.21}$$

を顕微インデンターで実測した $P(t)$ および $A(t)$ に適用し粘弾性圧子接触面積 $A_{\mathrm{ve}}(t)$ を算出する。

(i) *ステップ圧入試験*

顕微インデンテーション計測装置では，先に述べたフィードバック制御機能を利用することにより，時間に依存しない一定接触面積 A_0 へのステップ圧入試験， $A(t)=A_0u(t)$ を行い，これに伴い生じる圧子荷重緩和 $P(t)$ を実測することができる。この試験における粘弾性圧子接触面積 $A_{ve}(t)$ は(11.21)式を用い

$$A_{ve}(t)\left(\equiv A_{ve}\right)=\left\{A_0^{3/2}-\left[P(0)/cY\right]^{3/2}\right\}^{2/3} \qquad (11.22)$$

により与えられる。上式において， A_0 のみならず $A_{ve}(t)$ の値も時間に依存しない一定値($A_{ve}(t)\left(\equiv A_{ve}\right)$)となることに留意しておく必要がある。すなわち，$A(t)=A_0u(t)$ のステップ圧入の場合，粘性流動に伴う圧入荷重 $P(t)$ の緩和現象が観測される一方で，塑性変形の「非可逆性」により，塑性接触面積は荷重減衰初期の値(すなわち荷重減衰初期の最大荷重値 $P(0)$)により規定される時間に依存しない一定値， $A_p(t)\left(\equiv A_p(0)\right)=P(0)/cY$ ，として与えられる。したがって(11.22)式を用いて算出した A_{ve} の値と実測された圧子荷重緩和 $P(t)$ を(7.6)式に代入することにより，次式を用いて緩和弾性率を直接定量することができる；

$$E'_{relax}(t)=2\cot\beta\frac{P(t)}{A_{ve}} \qquad (11.23)$$

一方，一定の圧入荷重 P_0 へのステップ圧入試験 $P(t)=P_0u(t)$ の場合，顕微インデンターにより実測される圧子接触面積 $A(t)$ は時間と共に単調増大するクリープ現象として観測される。したがって(11.21)式を用いて求めた粘弾性接触面積

$A_{ve}(t)=\left\{A(t)^{3/2}-\left[P_0/cY\right]^{3/2}\right\}^{2/3}$ を(7.10)式の $A(t)$ に代入し，次式を用いてクリープコンプライアンスを定量決定することが出来る；

$$C'_{creep}(t)=\frac{\tan\beta}{2}\frac{A_{ve}(t)}{P_0} \qquad (11.24)$$

一例として，顕微インデンテーション計測装置(Berkovich 圧子)で求めた非晶質セレン(Se)(ガラス転移温度： $T_g=30.0^\circ$ C)の実測データに (11.24)式を適用して求めたクリープコンプライアンス $C'_{creep}(t)$ を図 11.14 に示す。図には，塑性変形が粘弾性関数の定量にどの程度の影響を及ぼすかを示すため，塑性接触面積

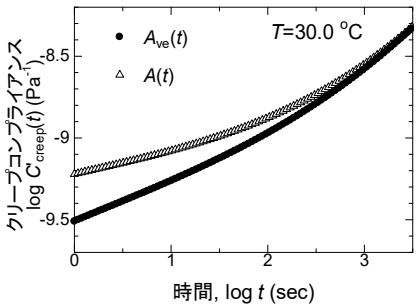


図 11.14 一定の圧入荷重 P_0 へのステップ圧入試験($P(t)=P_0u(t)$)により求めた非晶質セレンのクリープコンプライアンス。塑性変形の影響を含む実測接触面積 $A(t)$ から求めた曲線(△)，および塑性の影響を取り除いた $A_{ve}(t)$ を用い，(11.24)式から求めた曲線(●)の比較が示されている。初期には顕著に表れていた塑性変形の影響がクリープ変形の増大と共に相対的に漸減して行くため長時間側で両曲線は漸近・一致する

$A_{\mathrm{p}}(t)=P_0/cY$ の補正を施していない実測面積 $A(t)$ を(11.24)式の $A_{\mathrm{ve}}(t)$ に代入することにより求めたクリープコンプライアンスも示されている(図 11.14 の△印プロット)。

(ii) *定速荷重付加試験*

定速荷重負荷試験においては，顕微インデンターにより実測された $A(t)$ および入力刺激の表現式 $P(t)=k_P\cdot t$ を(11.21)式に代入することにより得られる $A_{\mathrm{ve}}(t)=\left\{A(t)^{3/2}-\left(k_P\cdot t/cY\right)^{3/2}\right\}^{2/3}$ を(7.3)式に代入することによりクリープコンプライアンスは次式で与えられる；

$$C'_{\mathrm{creep}}(t)=\frac{\tan\beta}{2k_P}\frac{dA_{\mathrm{ve}}(t)}{dt} \tag{11.25}$$

したがって顕微インデンターを用いて実測した $A(t)$ から上述の操作により塑性変形に起因する面積成分を除去して求めた粘弾性接触面積 $A_{\mathrm{ve}}(t)$ に時間微分を施すことによりクリープコンプライアンスを定量することができる。

(iii) *一般的な粘弾性刺激 - 応答試験*

上述の「ステップ状圧子接触面積付加試験」および「定速荷重付加試験」が推奨される最大の理由は，計測データを(7.3)式で示した積分型構成方程式に代入した際に，上述したように，比較的容易に，かつ解析解としてクリープコンプライアンス $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ あるいは緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を求めることのできる優位性にある。一方，一般的な刺激付加試験においては，計測データに不可避的に組み込まれてしまう塑性変形に起因して，(7.3)式から解析的に粘弾性関数を決定する際に多くの数学的な困難を伴う。例えば，比較的単純な刺激付加様式である圧子接触面積の定速付加試験 ($A(t)=k_A\cdot t$)においてすら，解析解として粘弾性関数を求めることが困難となる。しかしながら 20 世紀後半から急速な発展を遂げてきた電子計算機を利用することにより解析解としては処理できない複雑な粘弾性「刺激-応答」現象を数値解として処理し厳密に粘弾性関数を決定することが可能となってきた。

顕微インデンターを用いて計測される一般的な粘弾性「刺激-応答」から数値解析法に基づいて粘弾性関数を決定する基本プロトコルを以下に示す。先ず，粘弾性構成式(7.3)式に Laplace 変換を施すことにより次式を得る；

$$\bar{E}'_{\mathrm{relax}}(p) = 2\cot\beta \frac{\bar{P}(p)}{p\bar{A}_{\mathrm{ve}}(p)}$$
$$\bar{C}'_{\mathrm{creep}}(p) = \frac{\tan\beta}{2} \frac{\bar{A}_{\mathrm{ve}}(p)}{p\bar{P}(p)} \tag{11.26}$$

一方，顕微インデンターにより実測された任意の時間依存性を示す圧子接触面積 $A(t)$ および圧子荷重 $P(t)$ を(11.20)式に適用し粘弾性圧子接触面積 $A_{\mathrm{ve}}(t)$ を算出する。このようにして求めた $A_{\mathrm{ve}}(t)$ および実測された $P(t)$ を，べき級数を用いて再表現した後，これら級数の Laplace 変換により得られる $\bar{A}_{\mathrm{ve}}(p)$ および $\bar{P}(p)$ を(11.26)式に代入し，Laplace 空間での粘弾性関数 $\bar{E}'_{\mathrm{relax}}(p)$ および $\bar{C}'_{\mathrm{creep}}(p)$ を決定する。しかる後，これらの粘弾性関数 $\bar{E}'_{\mathrm{relax}}(p)$ および $\bar{C}'_{\mathrm{creep}}(p)$ に逆 Laplace 変換を施すことにより，最終的に，実空間での粘弾性関数，$E'_{\mathrm{relax}}(t)$ および $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ を決定する。

上述した数値解析手順を以下にまとめて示しておく。ここでは，緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ に焦点を当てて，その数値解析的導出手順を記述しておくが，同様の手順，あるいは(7.2)式の Laplace 空間での表現式

$$p\bar{C}'_{\mathrm{creep}}(p) = 1/p\bar{E}'_{\mathrm{relax}}(p) \tag{11.27}$$

を利用することにより，顕微インデンターを用いて実測される $P(t)$ - $A(t)$ 関係から，クリープコンプライアンス $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ についても，これを定量決定することができる。

【計装化顕微インデンテーション計測装置で実測された任意の時間依存性を有する圧子圧入荷重 $P(t)$ と圧子接触面積 $A(t)$ の関係に Laplace 変換/逆変換を適用し粘弾性関数を定量する数値解析手順】

(1) 高速圧入試験を行い，負荷徐荷速度に依存しない弾塑性領域で求めた P - A 直線プロットの勾配から Meyer 硬度 H_{M} と徐荷スティッフネス M を決定し(図 11.13 参照)，これらの値を(11.18)式に代入し降伏応力 cY を決定する。

(2) 粘弾性領域での実測 $P(t)$ - $A(t)$ 関係を(11.21)式に代入し $A_{\mathrm{ve}}(t)$ を求める。
ただし， $P(t)$ が時間と共に減衰緩和挙動を呈する場合には，荷重減衰初期の最大荷重値 $P(0)$ を用いて算出した塑性接触面積
$A_{\mathrm{p}}(t)\left(\equiv A_{\mathrm{p}}(0)\right) = P(0)/cY$ を(11.21)式に代入して $A_{\mathrm{ve}}(t)$ を求める。

(3) 選点法(コロケーション法)を用い， $P(t)$ および $A_{\mathrm{ve}}(t)$ を級数で記述する;

$$P(t) = P_{\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{n} P_i \exp\left(-t/\lambda_{1i}\right)$$
$$A_{\mathrm{ve}}(t) = A_{\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{n} A_i \exp\left(-t/\lambda_{2i}\right) \qquad (11.28)$$

(4) (11.28)式の Laplace 変換

$$\overline{P}(p) = \frac{P_{\mathrm{e}}}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{p + 1/\lambda_{1i}}$$
$$\overline{A}_{\mathrm{ve}}(p) = \frac{A_{\mathrm{e}}}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p + 1/\lambda_{2i}} \qquad (11.29)$$

を(11.26)式の緩和弾性率 $\overline{E}'_{\mathrm{relax}}(p)$ に関する表記に代入し，得られた結果に選点法を適用し Laplace 空間における緩和弾性率を次式で記述する

$$\overline{E}'_{\mathrm{relax}}(p) = \frac{E_{\mathrm{e}}}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{p + 1/\tau_i} \qquad (11.30)$$

(5) (11.30)式に Laplace 逆変換を施し，最終的に実空間における緩和弾性率を次式により表現する；

$$E'_{\mathrm{relax}}(t) = E_{\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{n} E_i \exp\left(-t/\tau_i\right) \qquad (11.31)$$

12 圧子力学実測データに基づいた物性論

12.1 ピラミッド圧子形状が弾塑性圧子力学応答に与える影響 [12.1]

平端円柱圧子や球形圧子と異なりピラミッド圧子は，その幾何相似性に由来し，計測される Meyer 硬度を始めとした各種の力学物性値が圧入深さに依存しないという, 力学物性の実用評価上，極めて重要な特長を有する。しかし，その一方で，ピラミッド稜線(エッジ)を介した隣接面間の幾何不連続性がエッジ部周辺での力学過程の数学的解析を複雑にしてしまうという短所をも併せ持つ。前章までの理論解析および有限要素数値解析において，ピラミッド圧子を用いることなく「ピラミッド圧子等価円錐圧子」をもっぱら採用してきた最大の理由は上述の「エッジ問題」を回避するためであった。

本節では，図 11.1 に示した汎用ピラミッド圧子である正四面ピラミッド Vickers 圧子，正三面ピラミッド Berkovich 圧子に加え，Vickers 圧子とは面傾き角度 β を異にする各種の正四面ピラミッド圧子についてもこれらの幾何学的な影響について実測データに基づいた考察を行う。さらに，図 12.1 に示す Knoop 圧子についても，その幾何形状が弾塑性圧子力学挙動に与える影響を論じる。Knoop 圧子は Vickers/Berkovich 圧子に比して圧子形状の幾何異方性が強いため単結晶の結晶方位性と関連付けて圧子力学物性を考察する上で利点を有しており，結晶学・鉱物学の分野で多用されている。

窒化ケイ素セラミックを例にとり，Vickers/ Berkovich/Knoop 圧子が P -h負荷徐荷曲線に及ぼす影響を図 12.2 に示す。第 11.1 節で述べた「圧子排除体積等価性」に基づき, 圧子接触面積 $A = gh^2$，あるいは圧子排除体積 $V = gh^3/3$ の係数として定義される面積因子 g が Vickers 圧子の値($g = 24.5$)と同一となるように Berkovich 圧子の幾何形状が規定されていることに由来し, 図 12.2 に示すように，Vickers 圧子 に対する P - h負荷徐荷曲線は Berkovich 圧子に対する負荷徐荷曲線に重なり, 両者の弾塑性圧子力学応答は一致する。換言すると，幾何形状を異にするピラミッド圧子であっても両者の面積因子 g が同一の値を有する圧子を用いた場合，弾性体，弾塑性体，そして粘弾性体の圧子力学挙動は

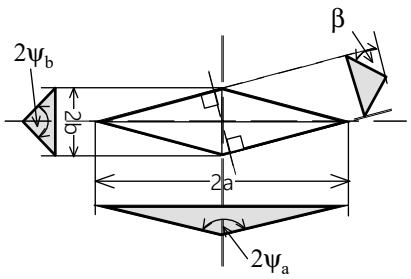


図 12.1 Knoop 圧子幾何形状：
長軸/短軸比 $a / b = 7.11$,
面傾き角度 $\beta = 25.2^\circ$,
長軸対頂角 $2\psi_a = 172.5^\circ$,
短軸対頂角 $2\psi_b = 130^\circ$

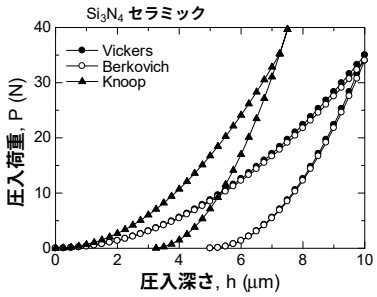


図 12.2 幾何形状を異にするピラミッド圧子に対する窒化ケイ素セラミックの P - h負荷徐荷曲線
●印：Vickers 圧子
○印：Berkovich 圧子
▲印：Knoop 圧子

[12.1] J. Zhang, M. Sakai, *Mater. Sci. Eng.* ***A*:381**, 62 (2004)

近似的に等価となり，上述した「エッジ問題」の影響は極めて少ない。一方，Knoop 圧子の場合，その面積因子は $g\left(=2\tan\psi_{\mathrm{a}}\cdot\tan\psi_{\mathrm{b}}\right)$=65.4(Vickers/ Berkovich 圧子の約 2.7 倍大きな g 値)で与えられるため，その P -h負荷徐荷曲線は図 12.2 に示すように，Vickers/ Berkovich の P -h負荷徐荷曲線に比べ，より急峻となる。また，Knoop 圧子の場合，P -h負荷徐荷曲線が囲むループエネルギー U_{r} および無次元圧痕深さ $\xi_{\mathrm{r}}\left(=h_{\mathrm{r}}/h_{\max}\right)$ は，共に，Vickers/ Berkovich 圧子の値に比べ有意に小さくなる(第 5.2 節参照)。この事実は，Knoop 圧子に対する窒化ケイ素セラミックの弾塑性応答が，Vickers/ Berkovich 圧子に対する応答よりも，より弾性的になることを意味している。Vickers/ Berkovich 圧子等価円錐圧子(面積因子 g が Vickers/ Berkovich 圧子の値と同じ 24.5 で与えられる円錐圧子(第 5 章参照))の面傾き角度が $\beta_{\mathrm{c}}=19.7^{\circ}$ であるのに対し，Knoop 圧子等価円錐圧子(その面積因子 $g\left(=\pi\cot^{2}\beta\right)$ が $g=65.4$ で与えられる円錐圧子)の面傾き角度は $\beta_{\mathrm{c}}=12.4^{\circ}$ となる(円錐圧子(cone indenter)であることを明記するため面傾き角度を β_{c} で表しておく)。この事実からも，Vickers/ Berkovich 圧子等価円錐圧子に比して，その面傾き角度 β_{c} のより小さな Knoop 圧子等価円錐圧子の弾塑性応答が，より弾性的となることが予測される。

この点をさらに明確に示すため，面傾き角度 β を異にする 3 種類の正四面体ピラミッド圧子($\beta=10^{\circ}$， $\beta=22^{\circ}$ (Vickers 圧子)，および $\beta=40^{\circ}$)に対する窒化ケイ素セラミックの P -h負荷徐荷曲線を図 12.3 に示す。これらの正四面体ピラミッドの面積因子 $g\left(=4\cot^{2}\beta\right)$ は, それぞれ, 129, 24.5(Vickers 圧子), 5.68, であり，対応する等価円錐圧子の面傾き角度に換算すると，それぞれ，$\beta_{\mathrm{c}}=8.87^{\circ}$，19.7°，および 36.6°で表現出来る。図 12.3 からも良く分かるように，面傾き角度の増大，換言すると，ピラミッド圧子の頂角部がより鋭くなるに従って，圧子力学的弾塑性応答は，より塑性的となる。この事実は，第 5.1 節で述べた塑性歪 ($PI=\varepsilon_{\mathrm{I}}E'/cY$； $\varepsilon_{\mathrm{I}}=\tan\beta/2$)が面角度の増大，すなわち β と共に増大することに対応している。

面傾き角度をそれぞれ異にする各種ピラミッド圧子を用いて求

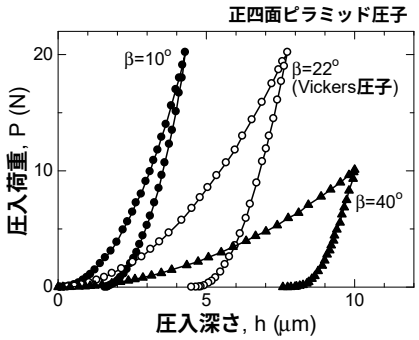


図 12.3 面傾き角度 β を異にする 3 種類の正四面体ピラミッド圧子($\beta=10^{\circ}$（●），$\beta=22^{\circ}$（Vickers 圧子)(○)，および $\beta=40^{\circ}$（▲))に対する窒化ケイ素セラミックの P -h負荷徐荷曲線

めた窒化ケイ素セラミックの Meyer 硬度 H_M をそれぞれの圧子形状に対応する等価円錐圧子面傾き角度 β_c に対してプロットした関係を図 12.4 に示す。Knoop 圧子を除く他の圧子は全て正四面体圧子であるが，Knoop 圧子のように幾何異方性の強い圧子形状に対しても等価円錐圧子面傾き角度 β_c を用いることにより，β_c の関数として硬度を一意的に記述出来ることを図 12.4 は示している。

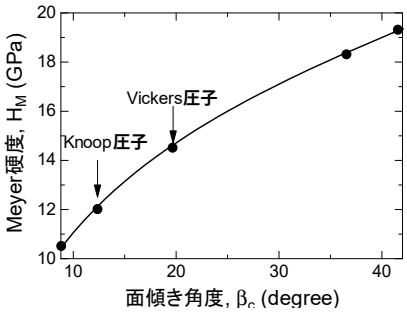


図 12.4 面傾き角度を異にする各種の四面ピラミッド圧子を用いて実験的に求めた窒化ケイ素セラミックの Meyer 硬度(●印)。実線は解析解((5.14)式)

12.2 各種工業材料の圧子力学挙動

延性に富む金属材料から脆性材料の代表格であるセラミックス・無機ガラスに至る多くの汎用工業材料について，計装化インデンテーション計測装置あるいは顕微インデンテーション計測装置を用いて測定された各種の弾塑性・粘弾性圧子力学特性を俯瞰することが本節の目的である。これらの圧子力学諸特性は材料開発や構造物設計のみならず計装化装置に関わる信頼性の精査等で重要な役割を果たしてくれる。

(1) P - h負荷徐荷曲線と弾塑性挙動[12.2]

図 12.5 に代表的な工業材料に付いて Vickers 圧子圧入の際に観測される P - h負荷徐荷履歴曲線(loading-unloading hysteresis curve)(第 5.2 節，第 10.3 節および第 11.2 節で述べたピラミッド圧子の圧入試験で広く用いられている $P-h^2$ プロット)を比較して示す。一瞥して分かることは，延性金属材料(金属アルミニウム，Al)と脆性セラミック材料(例えば，炭化ケイ素セラミック，SiC)との比較で，これらの履歴曲線が囲む面積(ループエネルギー U_r)に著しい相違の見られるという事実である。第 5.2 節で考察したように，このループエネルギー U_r は圧子の圧入・徐荷過程での塑性流動に伴う散逸熱を表しており，延性・脆性の指標として材料を識別する上で重要な物理量であることを図 12.5 からも良く理解することができる。

一方，第 5.2 節および第 10.3 節で詳述した無次元圧痕深さ $\xi_r\left(=h_r/h_{max}\right)$ は P - h負荷徐荷曲線から材料の延性・脆性を「直接かつ容易に」定量することのできる重要な弾塑性パラメータ(圧入荷重 P や圧入深さ h に依存しない物性値)であり，ループエネルギー U_r に定量的に関係付けることもできる(詳細は第 5.2 節参照)。

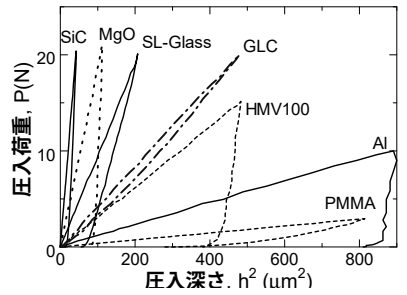


図 12.5 Vickers 圧子の圧入と徐荷の過程での $P-h^2$ 履歴プロット。

SiC: 炭化ケイ素セラミック
MgO: マグネシア
SL-Glass: ソーダ石灰ガラス
GLC: ガラス状炭素(GL-200H)
HMV100: 銅亜鉛合金(ビッカース硬度標準試料；HV=1GPa)
Al: 金属アルミニウム(純度 99%)
PMMA: 有機ガラス
(メチルメタクリレート樹脂)

[12.2] M. Sakai, Y. Nakano, *J. Mater. Res.*, **17[8]**, 2161 (2002)

無次元圧痕深さ $\xi_r(=h_r/h_{max})$ は U_r を定量する際に要する面積計測の煩わしさがなく最大圧入深さと残留圧痕深さの比として容易に定量できるため各種工業材料の塑性尺度を記述する実用的な物性値となる。各種工業材料の無次元圧痕深さ ξ_r を図 12.6 に示す。また，表 12.1 には，図 12.5，図 12.6 に示した材料を含も各種工業材料の諸物性値詳細が纏めて示されている。

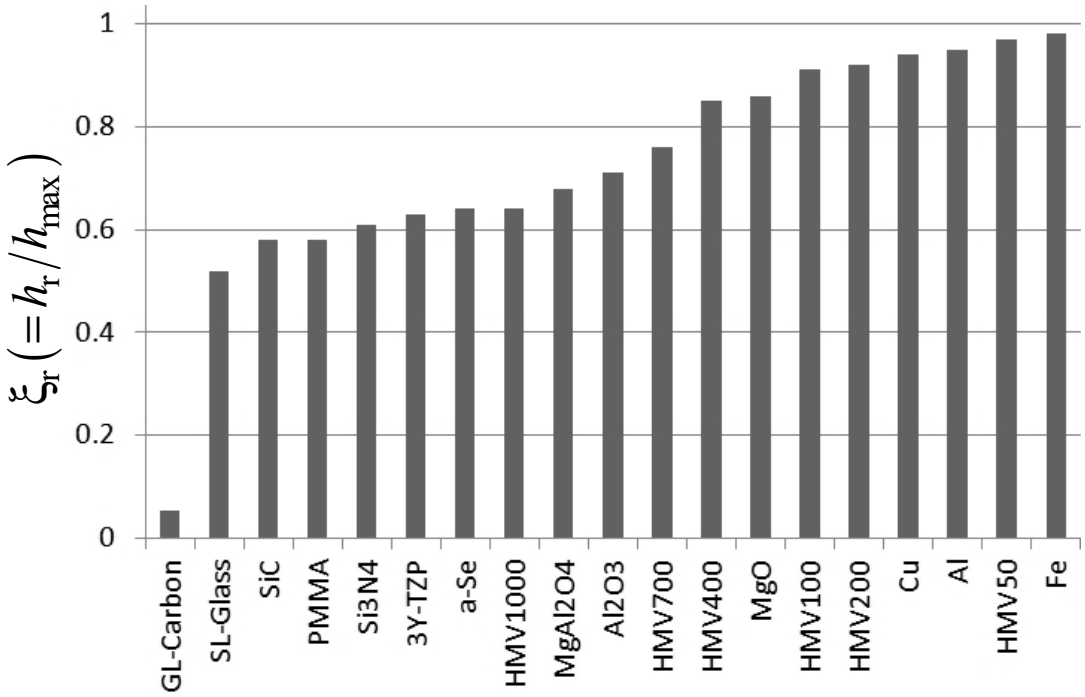


図 12.6 各種工業材料の無次元圧痕深さ $\xi_r(=h_r/h_{max})$。負荷曲線と徐荷曲線が一致する完全弾性体は $\xi_r=0$ で与えられ徐荷後に圧痕を残さない。一方，完全塑性体は $\xi_r=1$ で与えられ，外系から投入された圧入仕事量は全て塑性熱として散逸し，最大荷重時に形成された排除体積が残留圧痕となる。それぞれの材料物性の詳細を表 12.1 にまとめて示す

表 12.1　各種工業材料の力学物性および弾塑性圧子力学パラメータ

材料名	密度 d (g/cm^3)	ヤング率 E (GPa)	ポアソン比 (-)	Meyer硬度 HM (GPa)	k1 * (100 GPa)	ξr (h_r/h_max)
アルミナ (Al2O3)	3.94	410	0.24	15.5	3	0.71
スピネル (MgAl2O4)	3.54	289	0.28	13.4	2.53	0.68
マグネシア (MgO)	3.56	310	0.2	5.95	1.75	0.86
部分安定化ジルコニア (3Y-TZP)	6.05	212	0.32	14.8	3.13	0.63
炭化ケイ素 (SiC)	3.22	420	0.18	16.3	4.58	0.58
窒化ケイ素 (Si3N4)	3.22	310	0.23	11.8	3.28	0.61
ソーダ石灰ガラス (SL=Glass)	2.51	74.5	0.23	4.34	0.94	0.52
ガラス状炭素(GL-Carbon) (GL-200H)	1.5	28.7	0.15	1.94	0.42	0.053
非晶質セレン (a-Se)	4.26	9.5	0.33	0.43	0.11	0.64
金属アルミニウム (Al) (99% pure)	2.69	71.1	0.34	0.4	0.11	0.95
金属銅(Cu) (99.9% pure)	8.88	124	0.35	1.02	0.26	0.94
鉄(Fe) (99.5%pure)	7.82	222	0.25	1.13	0.27	0.98
HMV50 (銅亜鉛合金) (硬度標準試料; HV=0.5GPa)	8.96	128	0.35	0.51	0.11	0.97
HMV100 (銅亜鉛合金) (HV=1GPa)	8.54	118	0.33	1.14	0.3	0.91
HMV200 (高炭素クロム鋼)(HV=2GPa)	7.84	215	0.29	2.22	0.61	0.92
HMV400 (高炭素クロム鋼) (HV=4GPa)	7.84	214	0.29	4.17	1.23	0.85
HMV700 (高炭素クロム鋼) (HV=7GPa)	7.8	209	0.3	7.04	1.86	0.76
HMV1000 (高炭素クロム鋼) (HV=10GPa)	7.82	208	0.29	9.93	2.23	0.64
有機ガラス(PMMA) メチルメタクリレート樹脂	1.41	4.45	0.38	0.16	0.034	0.58

*　k_1 :ピラミッド圧子の荷重負荷曲線係数;　$P = k_1 h^2$

$P = k_2 (h - h_r)^2$ により定義される徐荷係数　k_2　は $k_2 = k_1 / (1 - \xi_r)^2$ により与えられる

図 12.5，図 12.6 および表 12.1 に示した各種工業材料の中にあって特筆すべき挙動を示す材料にガラス状炭素とマグネシアがある。前者は完全弾性体として近似できるほどに徐荷時の弾性回復が著しく，徐荷後に残留圧痕をほとんど認めない。これはガラス状炭素特有のナノ構造に起因するものであり次項でその詳細を論じる。一方，マグネシアはセラミック材料として分類されるが，図 12.6 に示すように無次元圧痕深さが $\xi_r = 0.86$ と金属材料に近い極めて高い値と延性を示しセラミック材料としては異質とも言える。この延性はその結晶構造に起因している。多くのセラミック材料は異方性の大きな結晶構造を有するため，その幾何学的な制約により結晶面間の滑り(転移の移動)が局所領域に制約される。このことがセラミック材料特有の脆性をもたらし小さな ξ_r 値へと導く。一方，マグネシアは延性に富む金属材料と同様に幾何学的対称性に優れる立方晶系の結晶構造を有し，多くの結晶方位に対して滑り面が存在する。このため，多結晶体であっても結晶粒界を横切って広領域に渡り連続する滑り面が形成され易くセラミ

ックスであるにもかかわらず著しい塑性を示す。

(2) 炭素材料の弾塑性圧子力学挙動

多くの有機物は高温熱処理により炭化し，さまざまな微構造を有する炭素材料を提供する。炭素材料は 1500℃以上の高温熱処理により容易に黒鉛化する易黒鉛化性炭素材料(graphitizable carbon)と黒鉛化し難い難黒鉛化性炭素材料(non-graphitizable carbon)に大別できる。黒鉛結晶特有の炭素六角網面間での滑りに起因する著しい塑性現象が易黒鉛化材料の圧子力学的特徴となる。一方，難黒鉛化材料は黒鉛結晶の成長が局所領域(ナノ領域)に制約され，結果的に六角網面間での滑りが抑制されてしまうため脆性的な圧子力学挙動を示す。

(a) ガラス状炭素[12.3]

ガラス状炭素(glassy carbon)は脆性が著しく，切削・研磨等の機械加工には多くの困難を伴う。多くの無機ガラスと類似した貝殻状波紋を有する破面を形成することから,「ガラス状」と称される。しかしガラス状炭素の圧子力学挙動は無機ガラスのそれとは全く異なる。先に両者の相違について簡単に触れておいたが，本節ではガラス状炭素を特徴づけているナノ構造との関連でその圧子力学挙動を考察する。

ガラス状炭素は熱硬化性樹脂(フェノール樹脂，エポキシ樹脂，セルロース系樹脂等)を高温熱処理(1000℃～2500℃)することにより作製される。直径 0.5nm～5nm に至る完全密閉型のナノ空孔が気孔率にして 25%～30%存在する多孔質体であるが，密閉気孔のため窒素ガス透過率はゼロと小さい。隣接するナノ空孔間の隔壁はナノメーターサイズの積層微小炭素六角網面により構成されている。研磨表面は無機ガラスのそれに類似し極めて平滑である。

無機ガラスの代表格としソーダ石灰ガラス(SLG)を例にとり，ガラス状炭素(GLC)と比較して両者の P - h負荷徐荷履歴曲線を図 12.7 に示す。GLC には，その徐荷時に完全弾性体に類似した著しい弾性回復が観測される。このため，SLG との比較で，GLC の負荷～徐荷過程でのエネルギー散逸(ループエネルギー，U_r)は極めて小さい。上述したナノ空孔(nano-pore)を取り巻く隔壁の著しい弾性変形が図 12.7 に示した特異的な P - h負荷徐荷履歴曲線へと導いている。完全徐荷後，GLC 並びに SLG 表面に形成される Vickers 圧子の残留圧痕幾何形状を図 12.8 に示す。SLG の圧痕(図

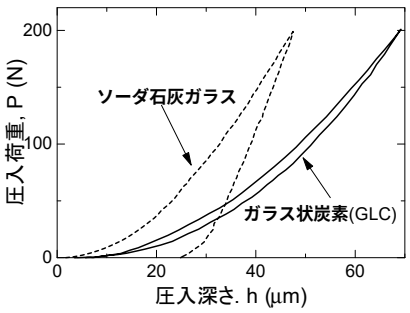


図 12.7 ソーダ石灰ガラス(SLG)とガラス状炭素(GLC)の P - h負荷徐荷曲線履歴曲線

[12.3] M. Sakai, H. Hanyu, M. Inagaki, *J. Am. Ceram. Soc.,* **78[4]**, 1006 (1995)

12.8(c))には脆性セラミックスの特徴である Vickers 圧子の稜線方向に沿った材料内部に向かって誘起・進展する相互に直行した一対の半円状き裂(radial crack)が観測される。一方，GLC の残留圧痕表面(図 12.8(a))には，圧子徐荷時に生じる著しい弾性回復のため，SLG の残留圧痕に見られたようなピラミッド状の窪みが残存しない。さらに，上述した radial crack とは異なり，圧子が接触していた材料表面上には複数の同心円状リングクラック(ring crack)が観測され，これらのリングクラックからは，図 12.8(b)に示すように，スカート状に材料内部に向かって延びる円錐き裂(cone crack)が発達成長している。このようなリングき裂・円錐き裂は**球形圧子**を圧入した際に多くのセラミック材料で観測されており Hertz リング(Hertz ring)，Hertz 円錐(Hertz cone)とも呼ばれている。ピラミッド圧子圧入にもかかわらず，GLC で観測されるこれらの特異なき裂形状は上述した多孔質ナノ空孔に起因するものである。ピラミッド圧子の圧入に対して，このように特異なリングき裂・円錐き裂の観察される脆性材料としては，GLC 以外には，唯一，溶融石英(石英ガラス)が知られている。石英ガラスは Si-O 四面体骨格に起因する疎な分子空間構造(GLC のナノ空孔構造に対応)を有しており，このことが，ピラミッド圧子圧入に対して GLC 類似のリングき裂・円錐き裂形成へと導いている。

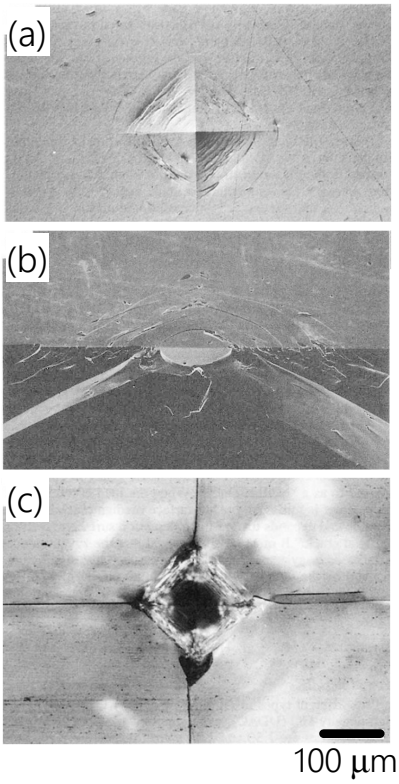


図 12.8 Vickers 圧子(圧入荷重 98.1N)により形成された残留圧痕の走査電子顕微鏡(SEM)映像；(a) ガラス状炭素(GLC), (b) GLC のリング・スカート状き裂，(c)ソーダ石灰ガラス(SLG)

(b) 多結晶黒鉛材料[12.4]

先に述べたようにガラス状炭素は難黒鉛化性炭素材料であることに起因し，極めて脆く機械加工に多くの困難を伴う。一方，原子炉用炉材や半導体製造工程において各種ジグ類として多用されている多結晶黒鉛材料(polycrystalline graphite)は易黒鉛化性炭素材料に分類され，塑性に富み高精度の機械加工が可能である。多結晶黒鉛材料の多くは平均粒径が数ミクロン以下の石炭系／石油系ピッチ由来コークス粒を骨材とし，これをピッチバインダーと共に混練・成型したものを 1000℃前後の高温で焼成炭化した後，さらに 2000℃～3000℃で黒鉛化することにより製造される。焼成炭素材は黒鉛結晶の成長が見られないため，その力学性状は極めて硬く，かつ脆い。一方，黒鉛化した炭素材料は黒鉛結晶六角網面間の滑りに由来する塑性変形のため延性に富み，高精度の機械加工が容易となる。

熱処理温度のみを異にする 3 種類の等方性炭素・黒鉛材料に

[12.4] M. Sakai, Y. Nakano, S. Shimizu, *J. Am. Ceram. Soc.*, **86[6]**, 1522 (2002)

Vickers 圧子を圧入した際に観測される，それぞれの P -h負荷徐荷履歴曲線を図 12.9 に示す。熱処理温度(HTT: Heat-Treatment Temperature)が880℃の炭素材料には通常の脆性セラミックス類似の P -h負荷徐荷曲線が観測される。しかし熱処理温度の増大とともに，この履歴現象が顕著となり，P -h負荷徐荷線が囲む面積(塑性散逸エネルギー，U_r)の増大が示すように著しい延性が発現する。易黒鉛化性炭素材に 2000℃を越える熱処理を施すと著しい黒鉛構造の発達・成長が生じる。このため最大圧入荷重からの徐荷過程で観測される弾性回復には他の工業材料には見られない極めて特異な特徴が観察され，図 12.9 および図 12.10 に示すように，完全徐荷後の無次元圧痕深さ $\xi_r\left(=h_r/h_{max}\right)$ は熱処理温度の上昇と共にゼロに収束していく。換言すると，**黒鉛構造の発達した炭素材料は，その P -h負荷徐荷曲線に塑性変形に伴う著しい履歴現象が観測されるにもかかわらず，ピラミッド圧子の完全徐荷後に残留圧痕を残さない。** また，熱処理温度と共に成長・発達する黒鉛構造を反映し，図 12.10 に示したように Meyer 硬度 H_M は熱処理温度と共に大きく低下して行く。

通常の弾塑性体では常に圧痕が「残留」する事実は，塑性流動に伴う結晶面の滑り運動に「**非可逆性**」が存在することを意味している。すなわち，圧子圧入時に生じた結晶面での滑り方向に対し，徐荷時には可逆的な逆方向結晶面滑りが生じないことを意味している。一方，黒鉛構造の発達した炭素材料においては，上述したように，著しい塑性散逸エネルギー(ループエネルギー，U_r)が観測されているにもかかわらず徐荷時の弾性回復に伴い，図 12.9，図 12.10 に示したように，圧痕の消滅($\xi_r \downarrow 0$)が見られる。この事実は，黒鉛六角網面間で生じる結晶面滑りが外部応力場に対して「**可逆的**」であることを示唆している。黒鉛六角網面間の相互作用力が van der Waals 力に基づくものであることを考えると，この「可逆的な結晶面滑り現象」を良く理解することができる。圧子力学応答で見られる，この可逆的な結晶面滑りが黒鉛材料特有の現象であることをさらに可視化して理解するために，Vickers 圧子の「負荷→徐荷→再負荷(loading→unloading→reloading)」の過程で観測される $P-h^2$ 曲線を窒化ケイ素の圧子力学挙動との対比で図 12.11 に示す。窒化ケイ素セラミックの場合，徐荷線とこれに引き続く再負荷線は一致しているのに比べ，黒鉛材(HTT2300)

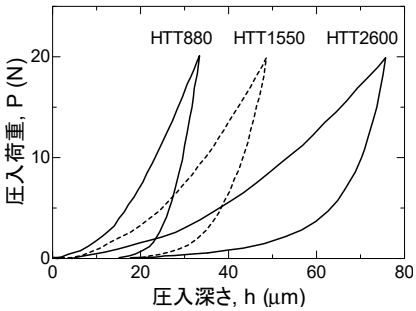


図 12.9 等方性炭素・黒鉛材の P -h負荷徐荷履歴曲線.
HTT880: 880℃熱処理
HTT1550: 1550℃熱処理
HTT2600: 2600℃熱処理

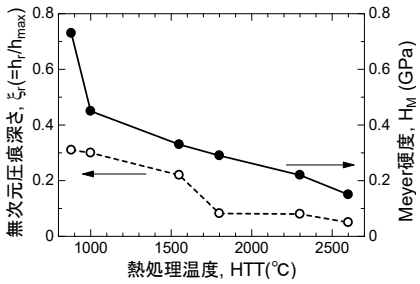


図 12.10 多結晶炭素・黒鉛材料の無次元圧痕深さ $\xi_r\left(=h_r/h_{max}\right)$ および Meyer 硬度 H_M に見られる熱処理温度(HTT)依存性

の再負荷線(図中，破線で示す)は最初の負荷線に隣接した軌跡を辿り, 再負荷線とこれに先立つ徐荷線との間にループを形成する。また，多くの金属材料やセラミック材料の $P-h^2$ 徐荷線は負荷線と同様に，直線で表されるが，図 12.11 に示すように黒鉛材の $P-h^2$ 徐荷線には下に凸の著しい湾曲が観測される。これら極めて特異な圧子力学挙動は上述の塑性変形(黒鉛結晶六角網目面間滑り)の可逆性を反映したものである。

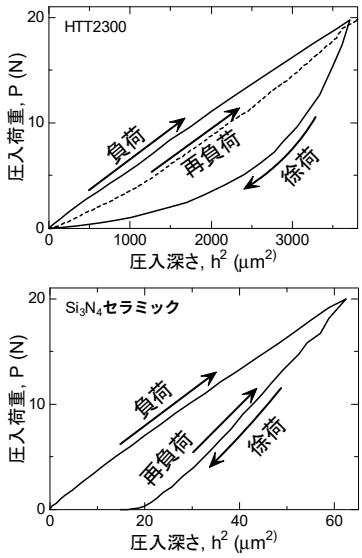


図 12.11 熱処理温度 2300℃の黒鉛材料(HTT2300)および窒化ケイ素セラミックの Vickers 圧子圧入における負荷→徐荷→再負荷過程における $P-h^2$ 履歴曲線

(3) 無機ガラスの高温粘弾性解析[7.4]

非晶質材料(ガラス材料)のガラス転移挙動および粘弾性に関する一般論および粘弾性圧子力学については既に第 6，7 章で論じた。本節ではシリカガラスに代表される無機ガラスのガラス転移挙動・粘弾性応答の圧子力学を論ずる。

シリカガラスはケイ素原子を中心とした正四面体基本骨格が酸素原子を介し三次元網目状に広がる共有結合性非晶質体である。そのガラス転移温度(T_g)は 1050℃と極めて高い。また，ケイ素正四面体に起因した極めて「疎」な空間構造をとるため，多くの無機ガラスの中でも最も嵩密度が低い(d=2.200 g/cm^3)。シリカガラスに Na_2O，CaO，B_2O_3 等のシリカ網目構造を修飾する低分子酸化物(網目修飾剤；network modifier)を添加することにより 3 次元網目構造の細分化や空間構造の緻密化を制御することができる。その結果，製造工程上あるいは実用上優位な特徴を有する各種のガラス材料を設計製作することができる。例えば，窓ガラスの材料として広く用いられているソーダ石灰ガラスはシリカガラスに所定量の Na_2O，　CaO および MgO を添加することにより製造され，そのガラス転移温度は T_g =540℃, 嵩密度は d=2.500 g/cm^3 である。これらの網目修飾酸化物の添加により，ソーダ石灰ガラスの転移温度はシリカガラスに比べ実に 500℃と著しく低下し，かつ緻密化(高密度化)が進む。網目修飾に伴い，以下に詳細を述べるが，その粘弾性挙動にも極めて著しい変化がもたらされる。

ソーダ石灰ガラスとシリカガラスを例に Berkovich 圧子(サファイア圧子；【注】大気等の酸化性雰囲気では 400℃を越える高温での圧子力学試験においてダイヤモンド圧子は酸化の影響を受けるため使用することができない)を用いて求めた軟化曲線(ガラス転移温度以下で一定荷重 P_0 を圧子に付加した後，昇温速度 q で定速

度昇温 $T = qt$ を行った際に生じる軟化挙動を圧子圧入量 $h_s(T)$ と走査温度 T の関係として示した曲線; 軟化曲線)を図 12.12 に示す。図 12.12 には $P_0 = 0.98\,\mathrm{N}$, $q = 5.0\,^\circ\mathrm{C/min}$ での計測結果が示されている。時間依存性を有する粘弾性応答であるため軟化挙動は走査昇温速度に依存し，q の増大と共に軟化開始温度(軟化温度，T_s)は高温側にシフトしていく。図 12.12 に例示した昇温速度 $q = 5.0\,^\circ\mathrm{C/min}$ で求めた軟化温度 T_s は, それぞれのガラスのガラス転移温度 T_g に, ほぼ一致している。軟化の進行速度に着目すると，ソーダ石灰ガラスとシリカガラスとでは著しく異なる。例えば，軟化開始時点での圧子圧入量をゼロに取り，軟化・流動により，この圧入量が 60μm に増加するまでの走査温度差は前者の場合，60℃(走査時間差に換算すると 12 分)であるのに比べ，後者では 250℃(走査時間差に換算すると 50 分)と大きく，シリカガラスは極めて緩慢な軟化挙動を示す。両者の軟化挙動に見られる相違はシリカ網目構造の空間的な広がりに著しい相違が存在し，このことが両者の軟化挙動を始め各種の粘弾性挙動(緩和時間スペクトル・遅延時間スペクトル(粘弾性スペクトルの詳細については APPENDIX D 参照))に影響を与えた結果として生じている。ソーダ石灰ガラスはシリカ網目修飾低分子酸化物の存在により，シリカ網目の空間的広がり(クラスター寸法)が局所領域に制限される(クラスターサイズが小さい)ため緩和時間・遅延時間スペクトルがシリカガラスに比して短時間側にシフトし，しかもスペクトル強度も小さくなる。

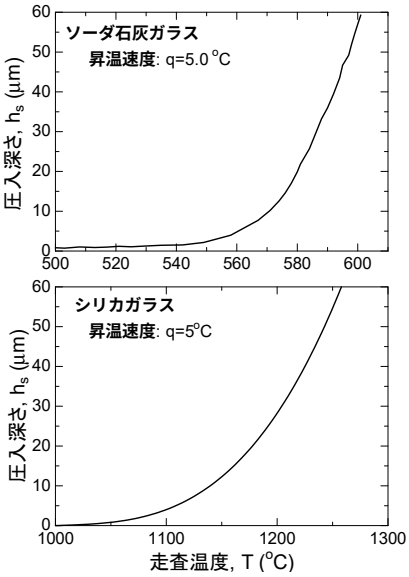


図 12.12 サファイア Berkovich 圧子に一定荷重 $P_0 = 0.98\,\mathrm{N}$ を付加し，走査速度 $q = 5.0\,^\circ\mathrm{C/min}$ で昇温することにより求めたソーダ石灰ガラスおよびシリカガラスの軟化曲線

定速圧入試験($h(t) = k_h \cdot t$; $k_h = 0.045\,\mu\mathrm{m/s}$)の結果を圧入荷重 $P(t)$ と圧入深さ $h(t)$ の関係として，ソーダ石灰ガラスを例に，図 12.13 に示す。また，これらの計測結果に(11.16)式を適用して求めた 570℃におけるソーダ石灰ガラスの緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を図 12.14 に，クリープコンプライアンス $C'_{\mathrm{creep}}(t)$ を図 12.15 に示す。さらに，図 12.15 に示したクリープ曲線を基に算出したソーダ石灰ガラスの遅延時間スペクトルをシリカガラスとの対比で図 12.16 に示す。これらの計測データは全て**圧子接触面積の計測が出来ない慣用計装化インデンター**を用いて求めたものであるため，第 11.2 節で詳述したように，得られた粘弾性関数の精度は決して良くない。次項では**圧子接触面積の定量が可能な顕微インデ**

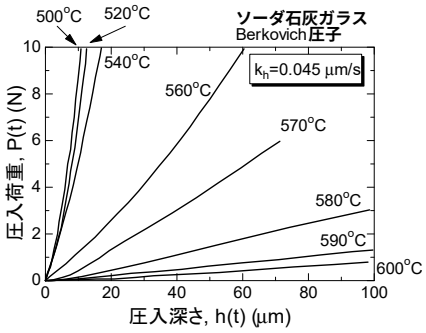


図 12.13 ソーダ石灰ガラスの定速圧入試験結果

ンターの計測事例を基に高精度粘弾性関数定量について述べる。

図 12.16 に示した緩和時間スペクトル(relaxation time spectrum)・遅延時間スペクトル(retardation time spectrum)の概念，レオロジー，および実測粘弾性関数からのこれらスペクトル導出についてはAppendix D に詳細が与えられている。

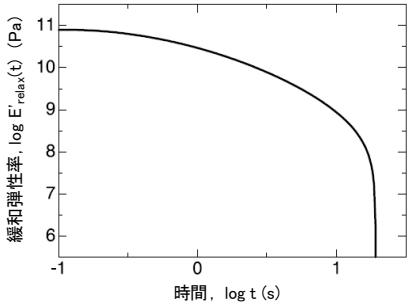


図 12.14 ソーダ石灰ガラスの緩和弾性率($T = 570$ ℃)

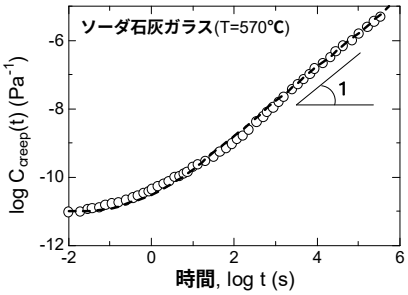


図 12.15 ソーダ石灰ガラスのクリープコンプライアンス(○印；$T = 570$ ℃)。(6.18)式および(6.19)式を用いて図 12.14 に示した緩和弾性率の数値変換により求めたクリープコンプライアンスが図中の破線で示されている

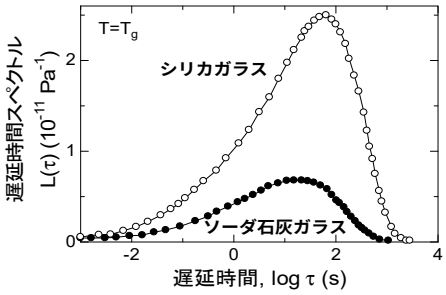


図 12.16 それぞれのガラス転移温度で求めたシリカガラス($T_g = 1050$ ℃)およびソーダ石灰ガラス($T_g = 540$ ℃)の遅延時間スペクトル

(4) 顕微インデンテーション計測装置を用いた非晶質セレンの粘弾性解析[7.5]

顕微インデンテーション計測装置の適用例として第 11 章で非晶質セレンのクリープコンプライアンスについて簡潔に記述した(図 11.14 参照)。本節では応力緩和関数に焦点を当て，その粘弾性挙動を詳述する。セレン(Se)は元素周期律表で第 16 族に分類される非金属元素(酸素族元素, カルコゲン)であり, 六方晶系や単斜晶系の結晶体として存在する一方，同族の硫黄と類似した性質を有し非晶質体としても存在する。鎖状分子構造を有する非晶質セレンは常温近辺(25℃~40℃；ガラス転移温度 $T_g = 30.0^\circ$ C)で粘弾性体として振る舞う。

計装化顕微インデンテーション計測装置では試験体に付加する力学的刺激として圧入深さ，圧入荷重のみならず接触面積を時間の関数としてプログラミングすることができる。例えば，ステップ状接触面積， $A(t) = A_0 \cdot u(t)$ ，を試験体に付加し，結果として生じる圧子荷重緩和 $P(t)$ を定量計測することができる。このようにして求めた荷重緩和試験結果に(11.23)式を適用することにより実測の荷重緩和 $P(t)$ から緩和弾性率 $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を容易に定量することができる。ガラス転移温度を含む各種温度における Berkovich 圧子荷重緩和試験で求めた非晶質セレンの $E'_{\mathrm{relax}}(t)$ を図 12.17 に示す。図 12.17 に示した，それぞれの温度での緩和曲線が「時間-温度換算則(time-temperature superposition principle)」を満たすことを次に示す。図 12.17 において，先ず，いずれかの温度での緩和曲線を選定し，その温度を基準温度 T_0 と定義する。この基準温度での緩和曲線をグラフ上に固定し，これよりも高温側の緩和曲線を横対数軸(時間軸)に沿って長時間側(グラフの右方向)に平行移動して基準温度での緩和曲線に重ね合わせを行う。一方，低温側緩和曲線については, これらの曲線を横対数軸に沿って短時間側(グラフの左方向)に平行移動し基準温度での緩和曲線に重ね合わせを行う。上述した一連の平行移動操作により，それぞれの温度での緩和曲線を基準温度での緩和曲線上に重ね合わせることにより

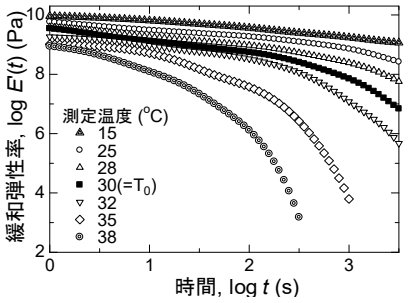


図 12.17 各種測定温度における非晶質セレンの緩和弾性率

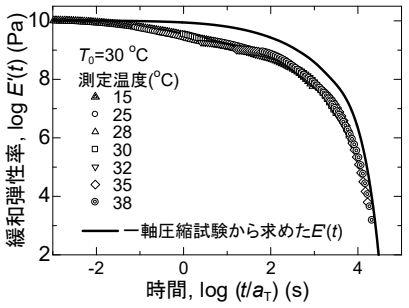


図 12.18 図 12.17 に時間-温度換算則を適用し移動因子 a_T を用い合成した非晶質セレン緩和弾性率のマスターカーブ。比較のために通常の巨視的試験(一軸圧縮試験)の結果を実線で示す

作成された合成曲線(マスターカーブ; master curve)を図 12.18 に示す(基準温度を$T_0\left(=T_g\right)=30.0$ ℃に設定している)。また，図 12.18 には圧子力学試験結果と従来の巨視的試験結果との相違・整合性を確認する目的で，短冊状試験片(1 x 1 x 3 mm^3) を用いた通常の汎用一軸圧縮試験(巨視的試験)から求めた緩和弾性率の合成曲線が実線で示されている。**両者の比較より圧子力学試験(微視的試験)で求めた緩和弾性率は巨視的試験の緩和弾性率に比べ短時間側での緩和現象がより顕著であることが分かる。この現象は三次元的拘束を受ける巨視的応答に比べ圧子力学的な粘弾性応答が自由表面近傍における，より拘束の少ない二次元平面上の分子運動を反映した結果として生じている。**

図 12.18 に示すように各温度での緩和曲線が「時間-温度換算則」を満たしている場合，上述の移動操作によりマスターカーブの合成が可能となる。図 12.18 の横軸(時間軸)に示したa_Tは上述した時間対数軸上の平行移動量を表しており,「移動因子(shift factor), a_T」と呼ばれる。移動因子は計測温度Tでの粘度$\eta(T)$と基準温度T_0での粘度$\eta(T_0)$の相対比，$a_T=\eta(T)/\eta(T_0)$，としての物理的意味を有している。図 12.17 に時間-温度換算則を適用し図 12.18 のマスターカーブを作成する際に用いた移動因子a_Tの温度依存性を図 12.19 に示す。非晶質セレンの移動因子a_Tが Arrhenius プロット，$a_T=A\cdot\exp\left(\Delta H/T\right)$，を用いることにより記述できることが分かる。ここで注目すべき点はガラス転移温度を境に低温側(粘弾性個体)と高温側(粘弾性液体)とでは活性化エンタルピーΔHに相違の存在する事実である。この事実は，それぞれの温度領域での変形・流動機構に相違が存在することを意味している。

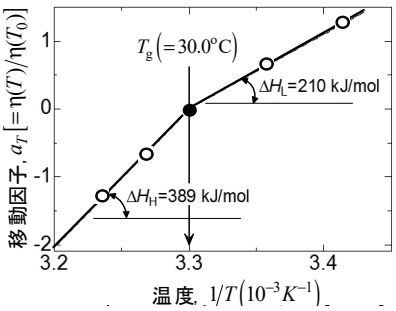


図 12.19 図 12.18 に示したマスターカーブ作成に用いた移動因子a_Tの Arrhenius プロット

(5) 顕微インデンテーション計測装置を用いたポリカーボネート樹脂のガラス域における粘弾塑性圧子力学計測と解析[12.5]

ポリカーボネート樹脂のガラス転移温度T_gは 145℃前後である。したがって常温ではガラス固体として振る舞うため通常の巨視的試験では時間依存性や刺激速度依存性は観測されない。しかし，

[12.5] C.G.N. Pelletier, J.M.J. Den Toonder, L.E. Govaert, N. Hakiri, M., Sakai, *Phil. Mag*. **88[9]**, 1291 (2008)

微視的力学応答を計測する圧子力学試験においては，上述の非晶質セレンの例に示したように，自由表面特有の分子運動を反映するため，ポリカーボネートを含む多くの高分子材料は巨視的には T_g 以下の温度でガラス固体として振る舞うにもかかわらず，圧子力学的応答(微視的応答)には時間依存性・刺激速度依存性が観測される。

常温において，半径 100μm の球形ダイヤモンド圧子を圧入速度 1μm/s で圧入深さ 13μm(圧子荷重で 1.0N)までポリカーボネート樹脂に圧入した後，その圧入量を 100 秒間保持した後，負荷時と同じ速度で徐荷した際に観測された負荷徐荷履歴曲線を図 12.20 に示す。最大圧入荷重に到達した時点で圧入深さを一定に保持している間に有意の荷重緩和が生じている。これはポリカーボネート樹脂が巨視的にはガラス固体であるにもかかわらず，微視的には粘弾性応答を示すことを示唆している。図中に示した破線は Hertz 弾性接触の解析解，$P=(4/3)E'\sqrt{R}h^{3/2}$ ((3.18)式参照)，を示す。球形圧子の圧入直後には，図 12.20 に示すように，Hertz 理論に則った弾性応答を示すが，圧入量の増大と共に粘弾塑性変形に伴う非弾性応答が顕著になり始める。

上述した最大荷重点での圧入量保持で観測される荷重緩和に付随して生じる圧子接触面 A_c の時間変化挙動を図 12.21 に示す。圧子の圧入深さ h を一定値 h_0 に保持しているにもかかわらず，圧子接触面 A_c は単調増大を示す。この事実は荷重緩和過程に並行してポリカーボネート自由表面が球形圧子の側面に沿って時間と共に「せり上がる(creeping-up)」現象の生じていることを意味している。この「せり上がり」現象はポアソン比に時間依存性の存在する粘弾性体特有の現象であり，第 10.4 節で示したように有限要素数値解析結果でも確認されている(図 10.14 参照)。ポリカーボネートのガラス転移温度（$T_g \approx 145$℃）よりはるかに低い常温での圧子力学的応答(微視的応答)に見られるこのように著しい時間依存粘弾性挙動は「巨視的試験片」での計測では決して観察されないことに留意しておく必要がある。

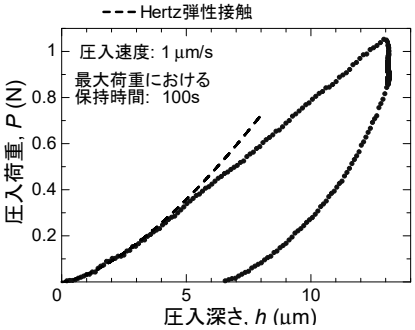


図 12.20 ポリカーボネート樹脂表面に球形圧子を定速で圧入後，最大荷重で圧入深さを 100 秒間保持した後に徐荷した際に観測された負荷徐荷履歴曲線。破線は Hertz 弾性接触の解析解を示す

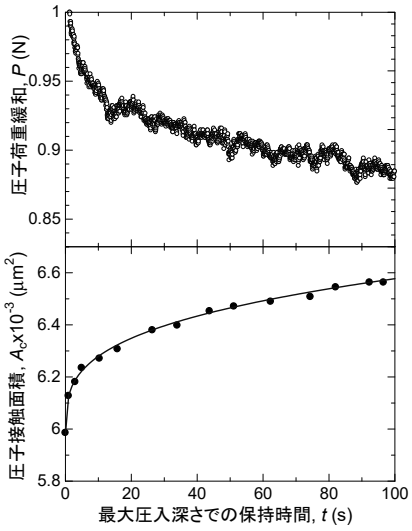


図 12.21 図 12.20 に示した最大圧入荷重 $P=1.0$ N で圧子圧入量を一定値に保持した際に観測される荷重緩和と，これに付随して生じる圧子接触面積 A_c の増大(圧子側面に沿ったポリカーボネート自由表面のせり上がり（creeping-up）が観測される

(6) 顕微インデンテーション計測装置を用いた積層複合材の弾塑性圧子力学[12.6]

ゾルーゲル法を用い有機シリケートの一種であるメチルシルセスキオキサン($MeSiO_{3/2}$)を各種工業材料基板上に被覆した積層複合材に顕微インデンテーション計測装置を適用することにより得られる計測データに焦点を当てた弾塑性圧子力学解析の結果について論じる。積層複合材料の弾塑性圧子力学挙動は圧子の圧入に伴い連続的に基板効果が増大していくため，汎用の計装化インデンテーション計測装置では得られた計測データの定量解析に多くの困難と限界が存在することを第 9 および第 11 章で詳述した。さらに，結果として得られた圧子力学物性値の精度・信頼性も低い。一方，圧子荷重 P，圧入深さ h に加え接触面積 A の計測が可能な顕微インデンターを用いることにより基板効果の著しい力学環境下においても，被膜および基板それぞれについて，各種物性値(弾性, 塑性, 粘弾性関数, 等々)を分離定量評価することができる(第 9 章～第 11 章参照)。

弾性率を異にする 5 種類の基板に種々の膜厚($t_f = 3 \sim 15\,\mu m$)で $MeSiO_{3/2}$(弾性率 $E'_f = 3.9$ GPa)を被覆した積層複合材の圧子力学挙動を以下に示す。用いた基板は，ポリカーボネート樹脂(E'_s =3.5GPa；$E'_s/E'_f = 0.95$)，アクリル樹脂(4.5GPa；1.2)，フェノール樹脂(7.1GPa；1.9)，ガラス状炭素(28.7GPa；7.7)，およびソーダ石灰ガラス(80.5GPa；22)である(()内はそれぞれの弾性率 E'_s および基板/被膜弾性率比 E'_s/E'_f を示す)。このように基板と被膜の弾性率比(E'_s/E'_f)で 0.96~22 の領域をカバーしているため比較的広い範囲で弾性率を異にする皮膜と基板とを組み合わせた積層複合体についての圧子力学挙動を俯瞰することができる。図 12.22 に代表的な 2 種類の積層複合材($MeSiO_{3/2}$/ポリカーボネート樹脂, および $MeSiO_{3/2}$/ソーダ石灰ガラス)について，Berkovich 圧子の負荷徐荷過程に伴う，それぞれの，圧子荷重 P と圧子接触面積 A との関係を例示する。図 11.13 に例示したように，均質等方半無限個体の場合，負荷過程および徐荷過程における P - A 関係は共に直線となり，それぞれの直線の勾配から Meyer 硬度 H_M および弾性率 E' を厳密に定量できる。一方，積層複合体では圧子圧入に伴い漸増して行く基板効果のため，負荷過程のみならず徐荷過程においてもこれらの P - A 関係は直線とはならない。$MeSiO_{3/2}$/ポリカーボネート樹脂積層材の場合(図 12.22 上図)，基板/被膜弾性率比

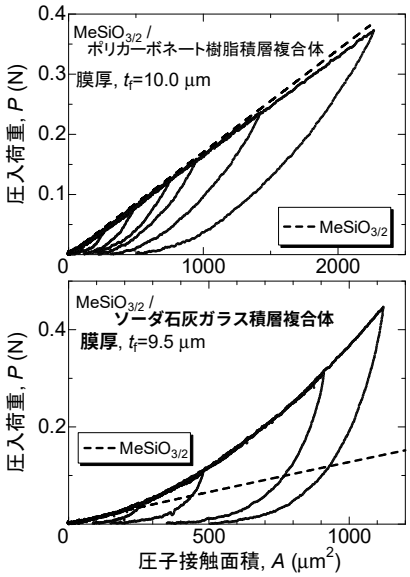


図 12.22 $MeSiO_{3/2}$/ポリカーボネート樹脂, および $MeSiO_{3/2}$/ソーダ石灰ガラスに対する多段階負荷徐荷試験で計測された Berkovich 圧子荷重 P と圧子接触面積 A の履歴曲線。破線は被膜に用いている $MeSiO_{3/2}$ 単体の P - A 負荷直線

[12.6] H. Hakiri, A. Matsuda, M. Sakai, *J. Mater. Res.*,**24[6]**, 1950 (2009)

が $E'_s/E'_f = 0.95$ と極めて 1.0 に近い。一方，$MeSiO_{3/2}$/ソーダ石灰ガラス積層材の基板/被膜弾性率比は $E'_s/E'_f = 22$ と極めて大きい。この弾性率比の相違を反映し，前者での P - A 負荷関係は比較的直線に近いが, 後者では, その非直線性は極めて著しい。$MeSiO_{3/2}$/ポリカーボネート樹脂積層材の場合，基板の弾性率が被膜の値より若干小さいため($E'_s/E'_f = 0.95$)，接触面積が増大するに従って，すなわち，圧子圧入が進むに従って P - A 負荷曲線の勾配は漸減して行く。一方，$MeSiO_{3/2}$/ソーダ石灰ガラス積層材の場合，$E'_s/E'_f \gg 1$ となるため， P - A 負荷曲線の勾配は圧入直後に見られる $MeSiO_{3/2}$ 単体が示す勾配から, 圧子圧入が進行するにつれて，著しい単調増大を示し最終的には基板を形成しているソーダ石灰ガラスの値へと漸近していく。

計装化顕微インデンテーション計測装置の実験操作とデータの解析について詳述した第 11.3 節を基に，本節で述べる積層複合体についても，これらの弾塑性物性値を定量することができる。先に述べたように基板効果により積層複合体の負荷過程での P - A 関係は直線とはならない。しかし，任意の A 値における P - A 負荷曲線の接線勾配から次式により Meyer 硬度 $H_M(A)$ を決定することができる：

$$H_M(A) = dP/dA \tag{12.1}$$

基板効果を受けるため Meyer 硬度は圧子接触面積の関数で与えられ，皮膜固有の Meyer 硬度は $A \downarrow 0$ への外挿により，基板固有の Meyer 硬度は $A \uparrow \infty$ への外挿により与えられる。一方, 図 12.22 に示したように，多段階負荷徐荷操作において，各段階での最大負荷荷重からの徐荷線初期勾配 $M(A)\left(\equiv \left(dP/dA\right)\right)$ (徐荷モジュラス (unloading modulus))を次式に代入することにより接触面積 A における弾性率 $E'(A)$ を定量することができる((11.17)式参照)；

$$E'(A) = 2\cot\beta \cdot M(A) \tag{12.2}$$

基板効果により弾性率も Meyer 硬度と同様に圧子圧入量，すなわち，圧子接触面積の関数として与えられ，皮膜固有の弾性率 E'_f は $A \downarrow 0$ への $E'(A)$ の外挿値により，基板固有の弾性率 E'_s は $A \uparrow \infty$ への外挿値により与えられる。また，上述の操作により求めた $H_M(A)$ および $M(A)$ を(11.18)式に代入することにより積層複合体の降伏応力 $Y(A)$ を定量することも可能となる。

膜厚 t_f で規格化した無次元圧子接触半径 a/t_f の関数として表し

た $MeSiO_{3/2}$ 被覆積層複合材料の Meyer 硬度を図 12.23，有効弾性率 $E'_{\mathrm{eff}}(a/t_{\mathrm{f}})$ を図 12.24 に示す。(12.2)式に示した弾性率 $E'(A)$ と有効弾性率 $E'_{\mathrm{eff}}(A)$ との相関については第 9.3 節および(9.19)式にその詳細が示されている。

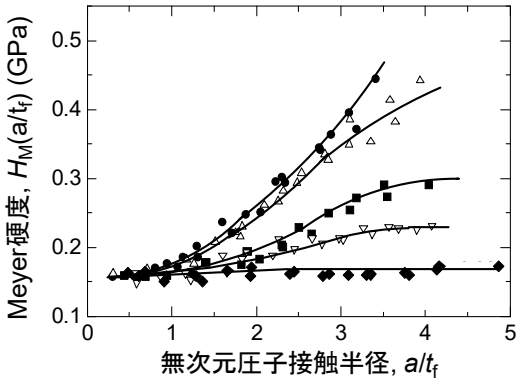


図 12.23 $MeSiO_{3/2}$ 被覆積層複合材料の Meyer 硬度と膜厚 t_{f} で規格化した無次元圧子接触半径 a/t_{f} の関係。各種の記号で表したプロットは基板材質の相違を示しており，上から下に：
ソーダ石灰ガラス(●)，ガラス状炭素(△)，フェノール樹脂(■)，アクリル樹脂(▽)，およびポリカーボネート樹脂(◆)

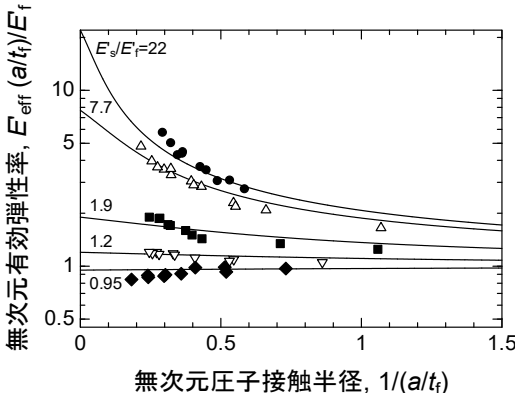


図 12.24 $MeSiO_{3/2}$ 被覆積層複合材料の有効弾性率 $E'_{\mathrm{eff}}(t_{\mathrm{f}}/a)$ と無次元接触半径 $1/(a/t_{\mathrm{f}})$ との関係。プロットに示す各種の記号は基板の材質を表す(図 12.23 参照)。実線は個々の $E'_{\mathrm{s}}/E'_{\mathrm{f}}$ に対応する Fredholm 積分方程式の数値解((9.11)式，第 9.1，第 9.3 節参照)

(7) 顕微インデンテーション計測装置を用いた ソフトマターの圧子力学

(i) アロエゲルの弾塑性解析

ゲル培養地の硬度･弾性率･表面付着力等の力学物性制御は iPS 細胞に代表される幹細胞増殖研究において極めて重要な課題となっている。これらゲル培養地類似物質としてアロエゲルを試料として採用し，その表面付着力および弾塑性物性値の定量における顕微インデンターの有用性を論じる。

顕微インデンターにより実測されたアロエの P - A 負荷除荷履歴曲線（Berkovich 圧子）の一例を図 12.25 に示す。付着力の存在しない試験材料の P - A 負荷除荷履歴直線（図 11.13 参照）とは全く異なり，表面付着力によりアロエの P - A 負荷除荷履歴曲線には著しい非線形性が観察される。しかも，表面付着力により圧子が試験体表面に引き寄せられるため**観測された圧子荷重は常に負の値を呈する。**

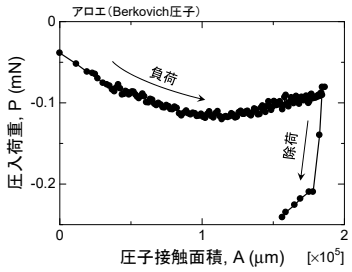


図 12.25 アロエの負荷-除荷過程における履歴曲線（顕微インデンター；Berkovich 圧子）。表面付着力の影響により圧子圧入荷重が常に負の値をとることに留意

図 12.25 に示した負荷曲線に(8.29)式を適用し，その結果得られる P - A 負荷線がグラフの原点を通る直線となるように付着靭性値 λ_{EP} を決定する。この一連の操作により得られたた解析結果を図 12.26 に示す。Meyer 硬度 H_M は付着靭性値 λ_{EP} の補正後に得られる直線プロットの勾配として与えられる。

一方，表面付着力の存在しない試験体の場合には P - A 除荷直線の勾配(除荷モジュラス M)を用いて容易に弾性率 $E'\left[=(\tan\beta/2)M\right]$ を求めることができる（第 11.3 節，図 11.13 参照参照）。しかし，アロエの場合，その表面付着力・付着靭性が負荷過程のみならず除荷過程に著しい影響を与えるため，除荷直線の勾配を用いると弾性率 E' の著しい過大評価をもたらす。この過大評価は接触表面が圧子に完全付着した状態で圧子除荷過程に入る，すなわち除荷初期過程での接触面積が圧子最大圧入時点での接触面積($A \equiv A_{max}$)を保持した状態で除荷が進行することに起因している。このような圧子接触面積一定での除荷力学過程においては計測される荷重 P -圧入深さ h プロット（除荷 P - h プロット）の勾配 S（除荷スティフネス; 図 12.27 参照）および接触面積 A_{max} を用い次式により試験体の弾性率 E' を定量することができる（第 11.2 節参照）；

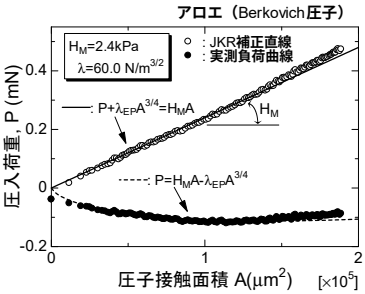


図 12.26 Berkovich 圧子圧入過程におけるアロエの実測 P - A 負荷曲線（●印，破線）。○印及び実線は付着靭性値 λ_{EP} の影響を除去した $P = H_M A$ 直線プロット

$$E' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{A_{\max}}} S \qquad (12.3)$$

したがって顕微インデンターにより定量計測した接触面積 $A_{\max}$ および図 12.27 に示した除荷スティフネス S を(12.3)式に代入し弾性率 E' を容易にかつ高精度で定量することができる。図 12.26 および図 12.27 のプロットを用いて定量された Meyer 硬度 H_M および弾性率 E' に排除体積加成則理論を適用することにより最終的に降伏応力 cY が定量される（(5.14)式参照)。

上述のデータ解析操作により定量されたアロエの弾塑性物性値；

弾性率	E'=25.5kPa
Meyer 硬度	H_M=2.40kPa
降伏応力	Y=1.25kPa
付着エネルギー	γ=15.6mJ/m^2

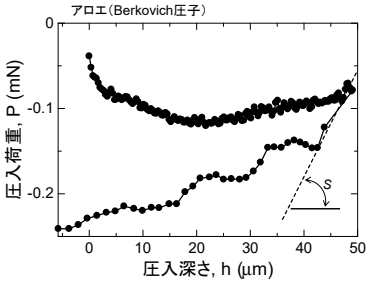


図 12.27 Berkovich 圧子圧入過程におけるアロエの実測 P - h 負荷除荷履歴曲線。除荷プロットの初期勾配（除荷スティフネス）S を(12.35)式に代入することにより弾性率 E' を定量できる

(ii) ポリウレタンゲルの粘弾性解析

ポリウレタン系ゲルマット（表面付着力を有する超軟質ゴムを用いた防振･耐震･転倒防止用粘着マットとして市販されている）の表面付着力・粘弾性関数の定量を目的として行った球面圧子を用いた顕微インデンターによるクリープ試験結果を以下に詳述する。

第 8 章で詳述したように顕微インデンターで計測された圧子接触半径 $a(t)^3$ を(8.45)式に適用してクリープ関数 $C'(t)$ および表面付着力 Γ（あるいは付着エネルギー γ）を同時定量するためには**異なるステップ圧入荷重 P_0 および P_1 におけるクリープ実験で実測されるそれぞれの圧子接触半径 $a_0(t)^3$ および $a_1(t)^3$ に関する情報が必要となる**。このようにして得られた実験データ $a_0(t)^3$ および $a_1(t)^3$ を(8.45a)式および(8.45b)式からなる連立方程式に適用し最終的に $C'(t)$ および $\Gamma(=3\pi R\cdot\gamma)$ を定量することが可能となる。

曲率半径 $R = 3$ mm の球面圧子を上述のポリウレタンゲルに適用したクリープ試験（ステップ圧入荷重；$P_0 = 0.11$ mN（試験温度：26.5℃）の結果を図 12.28 に示す。図 12.29 には異なるステップ荷重 $P_0 = 0.11$ mN および P_1=0.050mN における $a(t)^3$ クリープ曲線

の比較を示す。図 12.29 が示すように圧子圧入荷重が倍増しているにもかかわらず，それぞれの圧入荷重で誘起された接触半径に見られる差異は僅かな増大に留まっている。この事実は第 8 章で考察したよう表面付着力 Γ がクリープ挙動に著しい影響を与えていることを意味している。さらに，球圧子が試料表面に接触した直後（荷重が付加される直前；$P \approx 0$）に接触半径 $a(t)$ の急激な増大が観測される。これは表面付着力により圧子が試験体表面に引き寄せられる特記すべき現象である。

図 12.29 に示したステップ荷重 P_0=0.11mN および P_1=0.050mN での各 $a(t)^3$ クリープ曲線を(8.45)～(8.47)式に適用し算出したポリウレタンゲル膜のクリープ関数 $C'(t)$ を図 12.30 に，このクリープ関数に Laplace 変換/逆変換を適用して求めた緩和弾性率 $E'(t)$ を図 12.31 に示す。一方，試料に用いたポリウレタンゲル膜の表面付着張力（付着エネルギー）は(8.46)式の数値解から γ=6.61mN/m (=6.61mJ/m^2)と見積もられた。

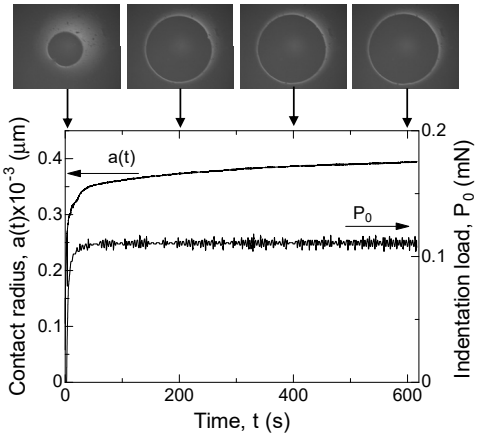


図 12.28　球面圧子($R = 3$ mm)のステップ圧入試験（$P_0 = 0.11$ mN）で観測された接触半径 $a(t)$ のクリープ曲線。圧子接触半径定量に用いた接触面画像の代表例（$t =$ 0, 200, 400, および 600s）をグラフの上部に示す

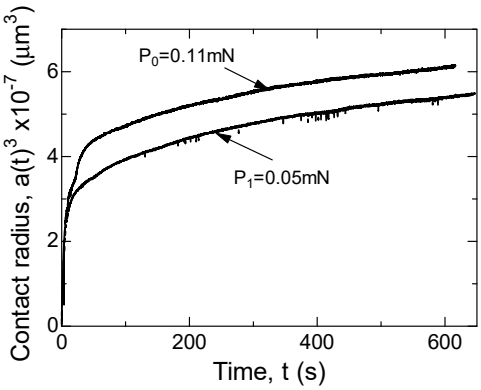


図 12.29　異なるステップ荷重 P_0=0.11mN および P_1 =0.050mN における $a(t)^3$ クリープ曲線

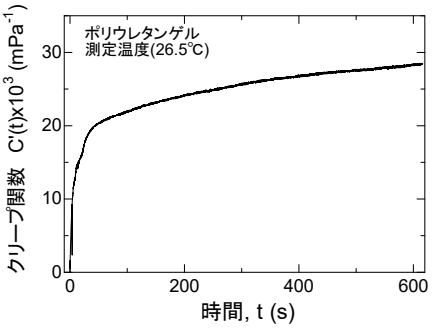


図 12.30 ポリウレタンゲルのクリープ関数 $C'(t)$（室温：26.5℃）

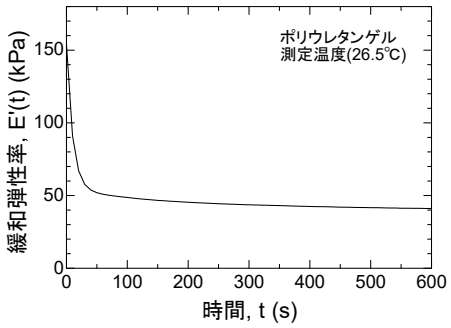


図 12.31 図 12.30 のクリープ曲線に Laplace 変換/逆変換を適用して求めたポリウレタンゲルの緩和弾性率 E'(t)（室温：26.5℃）

APPENDIX A

円柱座標系における力学変数の記述

(1) 変形と歪

連続体の変形に伴い A 点が A'点に変位した様子を図 A1 に示す。この変位をデカルト座標系では(u,v)により，円柱座標系では(u_r,u_θ)で記述する；

$$\begin{aligned} u &= u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta \\ v &= u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{A1}$$

一方，デカルト座標系と円柱座標系との間には次式の関係が存在する；

$$\begin{aligned} &r^2 = x^2 + y^2 \\ &x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \\ &\tan\theta = y/x \end{aligned} \tag{A2}$$

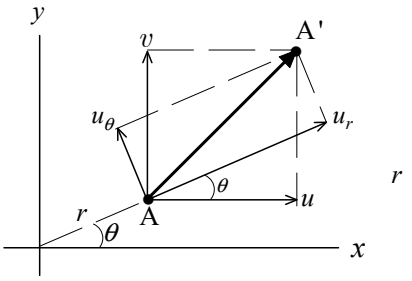


図 A1 デカルト座標系の(x,y)平面と円柱座標系の(r,θ)平面の相対関係。連続体の A 点が変形に伴い A'点に変位した様子を示す

(A1)式の関係を(1.2)式～(1.5)式に代入することによりデカルト座標系における歪の表現ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz}，およびγ_{zx}をu_r，u_θおよびθを用いて表現することが出来る。例えば，(1.2)式より

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{A3}$$

一方，(A1)式と(A2)式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\cos\theta - u_r\sin\theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\sin\theta - u_\theta\cos\theta \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\sin\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos\theta \end{aligned} \tag{A4}$$

したがって(A4)式を(A3)式に代入することにより次式を得る；

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = &-\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\cos\theta - u_r\sin\theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\sin\theta - u_\theta\cos\theta\right)\frac{\sin\theta}{r} \\ &+\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\sin\theta\right)\cos\theta \end{aligned} \tag{A5}$$

図 A1 において$\theta \to 0$とすることにより$\varepsilon_x \to \varepsilon_r$へと変換されるので，(A5)式で$\theta \to 0$とおくことにより

$$\varepsilon_r\left(=\varepsilon_x\big|_{\theta\to 0}\right)=\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{A6}$$

また，$\theta\to\pi/2$ とすることにより $\varepsilon_x\to\varepsilon_\theta$ へと変換させるので，(A5)式で $\theta\to\pi/2$ とおくことにより

$$\varepsilon_\theta\left(=\varepsilon_x\big|_{\theta\to\pi/2}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r} \tag{A7}$$

を得る。本文第 1 章では上述の詳細な式誘導をすることなく円柱座標系における，これらの法線歪を(1.9)式に記している。

(1.3)式で与えた xy 平面内のずり歪 $\gamma_{xy}\left(=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x\right)$ に上述と同様な演算を適用することにより次式を得る；

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}=&\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\cos\theta-u_r\sin\theta-\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\sin\theta-u_\theta\cos\theta\right)\frac{\cos\theta}{r}\\&+\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\sin\theta\right)\sin\theta\\&+\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\sin\theta+u_r\cos\theta+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\cos\theta-u_\theta\cos\theta\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\\&+\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\cos\theta\right)\cos\theta\end{aligned} \tag{A8}$$

さらに，（A8）式において $\theta\to 0$ とすることにより $\gamma_{xy}\to\gamma_{r\theta}$ となることに留意すると，最終的に，既に第１章（1.9）式に与えた

$$\gamma_{r\theta}\left(\equiv\gamma_{xy}\big|_{\theta\to 0}\right)=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r} \tag{A9}$$

の表現が得られる。

(A6)式，(A7)式および(A9)式で示した (r,θ) 平面における歪の表現式は (x,y) 平面から (r,θ) 平面への(A1)式および(A2)式を利用した座標変換として数学的に誘導されたものであり，連続体の変位・変形に基づいて誘導されたものではない。このため，ε_r，ε_θ，および $\gamma_{r\theta}$，それぞれの歪が有する「変形の物理」をより明確に理解するため，図 A2～A5 を用いて，(r,θ) 平面における変位と変形の関係から，改めて ε_r，ε_θ，および $\gamma_{r\theta}$ の誘導を行っておく。

図 A2 に示すように四辺形 abcd の「辺 bc（長さ dr）」は動径方向法線変位 u_r に伴い「辺 b'c'（長さ δ_r）」へと変形する。一方，この法線変位 u_r により「辺 ab（長さ $rd\theta$）」は「辺 a'b'（長さ $(r+u_r)d\theta$）」へと方位角方向にも変形する。したがって法線変位 u_r に伴う動径方向法線歪 ε_r は

$$\varepsilon_r = \frac{\delta_r}{dr} = \frac{(\partial u_r/\partial r)dr}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{A6}$$

方位角方向法線歪 $\varepsilon_{\theta 1}$ は

$$\varepsilon_{\theta 1} = \frac{(r+u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u_r}{r} \tag{A10}$$

により与えられる。方位角方向の法線歪 ε_θ は（A7）式で示した動径方向法線変位 u_r に伴い生じる $\varepsilon_{\theta 1}$ に加え，図 A3 に示すように方位角方向法線変位 u_θ に伴い生じる法線歪

$$\varepsilon_{\theta 2} = \frac{(\partial u_\theta/\partial\theta)d\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \tag{A11}$$

も存在する。従って方位角方向法線歪 ε_θ は $\varepsilon_{\theta 1}$ と $\varepsilon_{\theta 2}$ との和として最終的に次式により表現出来る；

$$\varepsilon_\theta (= \varepsilon_{\theta 1} + \varepsilon_{\theta 2}) = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \tag{A7}$$

(r,θ) 平面における，ずり変形の様子を図 A4 および図 A5 に示す。図 A4 には四辺形 abcd が動径方向のずり変位 du_r を受けて四辺形 a'bcd'へと変形する様子を，図 A5 には，同じ四辺形 abcd が方位角方向の変位 u_θ を受けて四辺形 a'b'c'd'へとずり変形する様子を示す。動径方向の変位に伴い生じるずり歪 γ_r は図 A4 に示すように

$$\gamma_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right) \tag{A12}$$

により与えられる。一方，方位角方向変位 u_θ に伴って生じるずり歪 γ_θ は図 A5 に示すように，

$$\gamma_\theta = \beta - \alpha = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \tag{A13}$$

により表現出来る。ここに角度 β は方位角方向変位 u_θ により四辺形 abcd の辺 cd と辺 ab との間に生じる相対的ずれ角度を表している。一方，角度 α は方位角変位 u_θ に伴う「四辺形 abcd の剛体としての回転」角度を表している。したがって，ずり変形に寄与する正味のずり角度は(A13)式に示したように $\beta - \alpha$ により与

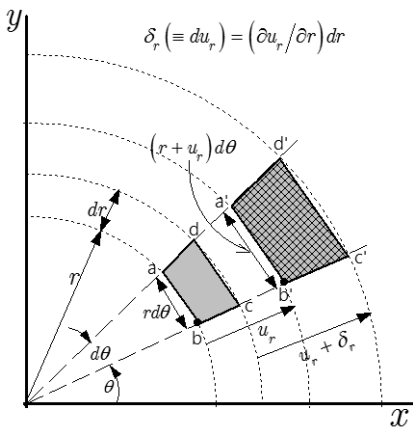


図 A2 連続体中にある四辺形(abcd)が動径方向（r 方向）の変位 u_r に伴い四辺形(a'b'c'd')に法線変形した様子を示す

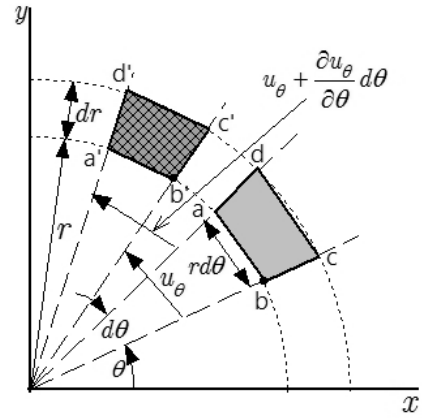


図 A3 連続体中にある四辺形(abcd)が方位角方向（θ 方向）の変位 u_θ に伴い四辺形(a'b'c'd')に法線変形した様子を示す

えられる。以上の考察より，r 方向および θ 方向への変位に伴い生じる (r,θ) 平面におけるずり歪 $\gamma_{r\theta}$ として，最終的に次式を得る；

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_r + \gamma_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \qquad \text{(A9)}$$

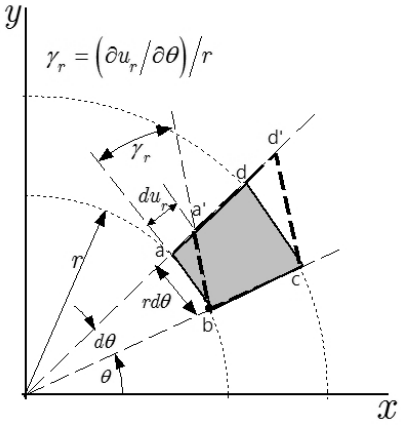


図 A4 連続体中にある四辺形(abcd)が動径方向（r 方向）の変形 du_r に伴い四辺形(a'bcd') にずり変形した様子を示す

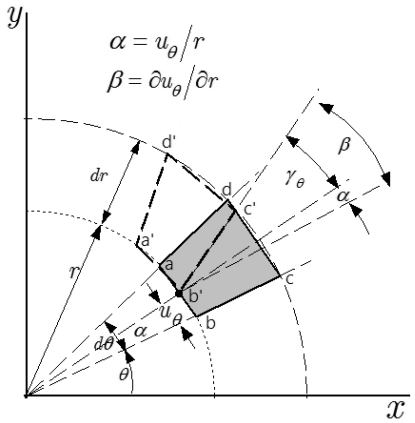


図 A5 連続体中にある四辺形(abcd)が方位角方向（θ 方向）の変位 u_θ に伴い四辺形(a'b'c'd') にずり変形した様子を示す

(2) 力学的平衡方程式

図 A6 に示した動径方向の力学平衡から次式を得る；

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta - \sigma_r r d\theta\right] \\
&\quad -\left[\left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}d\theta\right)\sin\frac{d\theta}{2}dr + \sigma_\theta \sin\frac{d\theta}{2}dr\right] \\
&+\left[\left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}d\theta\right)\cos\frac{d\theta}{2}dr - \tau_{\theta r}\cos\frac{d\theta}{2}dr\right] \\
&\quad + R r d\theta dr = 0
\end{aligned} \qquad \text{(A14)}$$

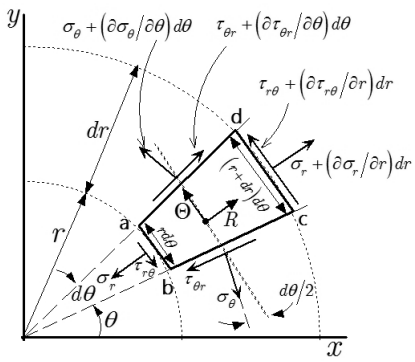


図 A6 紙面の垂直方向（z 軸）に単位厚さを有する微小四辺形要素 abcd に作用する応力（σ_r，σ_θ，$\tau_{\theta r}$，$\tau_{r\theta}$）および外力（R，Θ）

上式で $d\theta \ll 1$，$\sin d\theta/2 \approx d\theta/2$，$\cos d\theta/2 \approx 1$，および高次の微小量をゼロとおくことにより動径方向力学平衡式として，第 1 章(1.11)式に示した次式を得る；

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + R = 0 \qquad \text{(A15)}$$

記述を簡潔にするため，図 A6 には示されていない z 面（面の法線が z 軸方向を向いた面）に作用している動径方向ずり応力 τ_{zr} の寄与が(A14)式では省略されているが，(A15)式には，この寄与が追加されている。

上述した動径方向力学平衡に関する考察と同様にして方位角方向（θ 方向）の力学平衡は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}&\left[\left(\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)dr-\sigma_\theta dr\right]\cos\frac{\theta}{2}\\&\quad+\left[\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}d\theta\right)(r+dr)d\theta-\tau_{r\theta}rd\theta\right]\\&+\left[\left(\tau_{\theta r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}d\theta\right)dr+\tau_{\theta r}dr\right]\sin\frac{d\theta}{2}\\&\quad+\Theta rd\theta dr=0\end{aligned}\tag{A16}$$

したがって(A15)式の導出と同様に，(A16)式で $d\theta \ll 1$，$\sin d\theta/2 \approx d\theta/2$，$\cos d\theta/2 \approx 1$ と近似し，さらに $\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$ および，z 面に作用している方位角方向（θ 方向）ずり応力 $\tau_{z\theta}$ による寄与を考慮することにより，最終的に第 1 章(1.11)式で示した次式を得る。

$$\frac{2\tau_{\theta r}}{r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\Theta=0\tag{A17}$$

APPENDIX B

Bessel 関数

Friedrich W. Bessel (1784-1846) の名を冠する Bessel 関数ではあるが，歴史的には，1732 年，懸垂鎖の振動問題の解析において Daniel Bernoulli によりその概念が導入された。一方，1824 年，Bessel は太陽引力に起因する摂動を取り入れた惑星の周遊問題を扱うに当たって Bessel 関数を適用している。本文第 2 章で論じた Laplace 方程式への Bessel 関数の適用は，1878 年，Lord Rayleigh (John W. Strutt) が行った円筒内部に張られた膜の振動問題解析に端を発している。

(2.22)式で与えたように, Bessel 方程式は次式により変数 x に関する二階微分方程式として定義される；

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{y}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad \text{(B1)}$$

(B1)式は，二階微分方程式であるがゆえに，その解は二個の積分定数 A および B，次式で示す第一種 n 次 Bessel 関数 $J_n(x)$ および第二種 n 次 Bessel 関数 $Y_n(x)$ を用いて記述することが出来る；

$$y=AJ_n(x)+BY_n(x) \qquad \text{(B2)}$$

第二種 Bessel 関数 $Y_n(x)$ は Weber 関数あるいは Neuman 関数とも呼ばれ次式により第一種 Bessel 関数に関係付けられる；

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos(nx)-J_{-n}(x)}{\sin(nx)} \qquad \text{(B3)}$$

n が正あるいは負の整数の場合, $J_n(x)$ は変数 x の全ての領域において有限の値を有する一方，$Y_n(x)$ は(B3)式に示すように $x=0$ が特異点となり無限に発散する。このため，Bessel 関数を用いて多くの物理現象を記述するに当たっては，(B2)式の積分定数 B は自動的に $B=0$ と置く必要があり, 第一種 Bessel 関数 $J_n(x)$ のみが物理問題解析で重要な役割を果たす。

第一種 Bessel 関数 $J_n(x)$ は次式を用い級数で表現することができる；

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \qquad \text{(B4)}$$

上記の級数解から次に示す漸化式が容易に誘導される；

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{B5}$$

(B5)式の等価表現として

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$
$$\frac{dJ_{n+1}(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right] \tag{B6}$$

あるいは

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$$
$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \tag{B7}$$

の関係も存在する。

本文第 2 章で利用した導関数 $d\varphi / dr$ の一次 Hankel 変換 $\int_0^\infty r\left(d\varphi / dr\right)J_1\left(\xi r\right)dr$ を関数 φ の零次 Hankel 変換 $\int_0^\infty r\varphi J_0(\xi r)dr$ を用い $\int_0^\infty r\left(d\varphi / dr\right)J_1\left(\xi r\right)dr = -\xi\int_0^\infty r\varphi J_0(\xi r)dr$ により表現出来る事実は上記の漸化式を用いることにより容易に証明される。本文第 2 章で強調したように Hankel 変換は円柱座標系で記述される調和方程式あるいは重調和方程式の解を求める際に威力を発揮する。

APPENDIX C

Laplace 変換の基礎

Laplace 変換は自然科学や工学の諸分野における線形刺激応答理論を記述する微分方程式や積分方程式の解を求める際に極めて有用な数学的手法を提供する。線形刺激応答とは，注目する系に付加する刺激と, これに対する系からの応答との間に線形関係(比例関係）の存在する現象であり，本書で取り扱う力学系では完全弾性体における Hooke 則（刺激としての応力と応答としての歪が弾性率を介して比例関係）や線形粘弾性構成則が線形刺激応答の代表例である。力学分野のみならず電磁気学の分野においても線形刺激応答理論は多方面で重要な役割を果たしている。

実空間での線形微分方程式や積分方程式は, これらに Laplace 変換を施すことにより Laplace 空間で代数方程式に変換される。これらの代数方程式の解を Laplace 逆変換することにより実空間に戻し，これらの微分方程式・積分方程式の解を容易に求めることが出来る。

(1) Laplace 変換の定義

Laplace 演算子 $\mathcal{L}$ を適用することにより実空間において変数 t を用いて記述された任意の関数 $f(t)$ は次式で定義される Laplace 空間における関数 $\bar{f}(p)$ に変換される；

$$\mathcal{L} f(t) = \bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \qquad \text{(C1)}$$

ここに p は Laplace 空間における変数であり，その物理次元は実空間における変数 t の逆数の次元を有する。

(2) Laplace 変換の基本特性

Laplace 変換の基礎をなす最も一般的な特性式を以下に示す

(i) $$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \bar{f}_1(p) + c_2 \bar{f}_2(p) \qquad \text{(C2)}$$

ここに，c_1 および c_2 は定数

(ii) $$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\bar{f}(p) - f\left(0^-\right) \qquad \text{(C3)}$$

ここに $f\left(0^{-}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(0-\varepsilon\right)$ で定義,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right]=p^2\overline{f}\left(p\right)-pf\left(0^{-}\right)-\left.\frac{df\left(t\right)}{dt}\right|_{t=0^{-}} \tag{C4}$$

(iii) $$\mathcal{L}\left[\int_0^t f\left(t-t'\right)g\left(t'\right)dt'\right]=\overline{f}\left(p\right)\cdot\overline{g}\left(p\right) \tag{C5}$$

ここに $\int_0^t f\left(t-t'\right)g\left(t'\right)dt'$ は畳込み積分あるいは重畳積分 (convolution integral)と呼ばれ，本文第 6.2 節および第 6.3 節で述べた Boltzmann の重畳原理・積分（(6.15)式，(6.20)式）はその代表例である。

(3) 線形刺激応答理論で有用となる代表的な解析関数の Laplace 変換対応表

表 C1 Laplace 変換対応表

	$f(t)$	$\overline{f}\left(p\right)$
1	$u(t-a)$；単位ステップ関数	e^{-ap}/p
2	$\delta\left(t\right)\left(\equiv du(t)/dt\right)$；Dirac 関数	1
3	1	$1/p$
4	t^n；$n=1,2,3\cdots$	$n!/p^{n+1}$
5	e^{at}	$1/\left(p-a\right)$
6	$\left(e^{bt}-e^{at}\right)/\left(b-a\right)$；$a\neq b$	$1/\left[\left(p-a\right)\left(p-b\right)\right]$
7	$\left(be^{bt}-ae^{at}\right)/\left(b-a\right)$；$a\neq b$	$p/\left[\left(p-a\right)\left(p-b\right)\right]$
8	$\sin at$	$a/\left(p^2+a^2\right)$
9	$\cos at$	$p/\left(p^2+a^2\right)$
10	$J_0\left(at\right)$；零次 Bessel 関数	$1/\sqrt{p^2+a^2}$

(4) Laplace 変換の適用例

一例として，本文(6.1)式で示した線形微分方程式

$$a_0\varepsilon(t)+a_1\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=b_0\sigma(t)+b_1\frac{d\sigma(t)}{dt} \tag{C6}$$

に Laplace 変換を施すことにより代数方程式が得られる；

$$\begin{aligned}&a_0\bar{\varepsilon}(p)+a_1\left[p\bar{\varepsilon}(p)-\varepsilon\left(0^-\right)\right]\\&\quad=b_0\bar{\sigma}(p)+b_1\left[p\bar{\sigma}(p)-\sigma\left(0^-\right)\right]\end{aligned} \tag{C7}$$

過去時間（$t<0$）では系への外部刺激が存在しないことから，初期条件として$\varepsilon\left(0^-\right)=0=\sigma\left(0^-\right)$を(C7)式に代入することにより，Laplace 空間において, 応力を歪に関係付ける代数方程式として次式を得る；

$$\begin{aligned}&\bar{\sigma}(p)=E^*(p)\bar{\varepsilon}(p)\\&E^*(p)=\frac{a_0+a_1p}{b_0+b_1p}\end{aligned} \tag{C8}$$

(C8)式中の$E^*(p)$は，本文第 6 章で導入した擬弾性率（(6.4)式）であり，(C8)式中の係数，a_0，a_1，b_0，およびb_1に(6.2a)式～(6.2c)式を代入することにより，弾性率，粘性係数，緩和時間等を用いて Maxwell モデルや Zener モデルの擬弾性率を表現することが出来る（(6.5a)式～(6.5c)式参照)。

本文第 6 章の(6.6)式で示したステップ状の一定歪$\varepsilon(t)=\varepsilon_0u(t)$を系に付加した場合，その Laplace 空間における表記は，表 C1 の対応表#1 を利用することにより，$\bar{\varepsilon}(p)=\varepsilon_0/p$により与えられる。したがって(C8)式は次式のように書き換えられる；

$$\frac{\bar{\sigma}(p)}{\varepsilon_0}=\frac{a_1}{b_0+b_1p}+\frac{a_0}{p\left(b_0+b_1p\right)} \tag{C9}$$

表 C1 の対応表を利用し，(C9)式に Laplace 逆変換の操作を施すことにより最終的に実空間における表現式として次式を得る；

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=\frac{a_0}{b_0}+\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_0}{b_0}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\\&\tau=\frac{b_1}{b_0}\end{aligned} \tag{C10}$$

(C10)式はステップ状の一定歪に対する線形微分方程式，(C6)式，の解である。第 6 章で与えた粘弾性モデル（(6.2a)式～(6.2c)式）の諸係数a_0，a_1，b_0，およびb_1を(C10)式に適用することにより，それぞれのモデルに対する応力緩和挙動の定量表現が可能となる。

APPENDIX D

緩和時間スペクトルと遅延時間スペクトル

本文第 6 章および第 7 章で用いた単純粘弾性モデル（Maxwell モデル, Zener モデル）を用いて実材の非晶質工業材料の粘弾性挙動を定量的に記述することは不可能である。したがって第 6 章で述べた Wiechert モデル（図 6.5 参照）に見るように複数の緩和時間により構成された，より一般的な粘弾性モデルに基づき緩和弾性率やクリープコンプライアンスを表現しておく必要がある。このため，第 6 章の(6.8)式～(6.13)式を拡張し，緩和時間あるいは遅延時間が時間軸に沿って広範囲に連続分布した「時間スペクトル」の概念を導入する**[A1]**。

複数の緩和時間を有する一般的な粘弾性体の緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ は第 6 章で導入した Wiechert モデルから得られた離散型表現式

$$E_{\mathrm{relax}}(t) = E_{\mathrm{e}} + \sum_i E_i e^{-t/\tau_i} \tag{6.13}$$

を拡張し，より一般的な積分型表記で書き換えることが出来る；

$$E_{\mathrm{relax}}(t) = E_{\mathrm{e}} + \int_0^{\infty} M(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \tag{D1}$$

上記の関数 $M(\tau)$ は「緩和分布関数」と呼ばれ離散型表記（(6.13)式）における緩和時間 τ_i での弾性率 $E_i\,(\equiv \eta_i/\tau_i)$ に対応している。関数 $M(\tau)$ は記憶関数(memory function)の一種であり，その物理次元は Pa/s で与えられ弾性率 E_i の次元である Pa とは異なることに注意しておく必要がある。そこで，(D1)式において，新たに弾性率の次元 Pa を有する分布関数 $H(\tau)\left[\equiv \tau M(\tau)\right]$ を導入することにより，(D1)式を書き換える；

$$E_{\mathrm{relax}}(t) = E_{\mathrm{e}} + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) e^{-t/\tau} d\ln\tau \tag{D2}$$

弾性率の物理次元を有する関数 $H(\tau)$ は「緩和時間スペクトル」と呼ばれている。したがって，緩和時間が $\ln\tau$ と $\ln\tau + d\ln\tau$ の間にある要素バネの弾性率を $H(\tau)d\ln\tau$ を用いて表現することが可能となる。

同様に，遅延時間が $\ln\tau$ と $\ln\tau + d\ln\tau$ の間にある要素バネのコンプライアンスを $L(\tau)d\ln\tau$ で定義することにより，一般拡張積分

[A1] J.D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3rd Ed. Wiley (1980)

型表記としてクリープコンプライアンスを次式で表現することが出来る；

$$C_{\mathrm{creep}}(t) = C_{\mathrm{g}} + \frac{t}{2(1+\nu)\eta} + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{-t/\tau}\right)L(\tau)d\ln\tau \tag{D3}$$

(D3)式において，クリープコンプライアンスの物理次元を有する $L(\tau)$ は遅延時間スペクトルと呼ばれる。上式において，C_{g} はガラスコンプライアンス，η は定常ずり粘度を意味する。

第 6 章で示したように緩和弾性率 $E_{\mathrm{relax}}(t)$ がクリープコンプライアンス $C_{\mathrm{creep}}(t)$ に

$$\int_0^t E_{\mathrm{relax}}(t-t')C_{\mathrm{creep}}(t')dt' = t \tag{6.19}$$

を介して結びつけられるように，緩和時間スペクトル $H(\tau)$ と遅延時間スペクトル $L(\tau)$ との間にも一定の関係が存在し，次式で示す積分変換により $H(\tau)$ を用いて $L(\tau)$ を，あるいは $L(\tau)$ を用いて $H(\tau)$ を表現することが出来る**[A2-A4]**；

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \frac{H(\tau)}{\left[\pi H(\tau)\right]^2 + \left[E_{\mathrm{g}} - \int_0^\infty \frac{H(1/s)}{s-1/\tau}ds\right]^2} \\ H(\tau) &= \frac{L(\tau)}{\left[\pi L(\tau)\right]^2 + \left[C_{\mathrm{g}} + \frac{\tau}{\eta} + \int_0^\infty \frac{L(1/s)}{s-1/\tau}ds\right]^2} \end{aligned} \tag{D4}$$

図 12.16 に示した遅延時間スペクトル $L(\tau)$ は次式に示した Schwarzl-Staverman 近似**[A5-A7]**

$$L(\tau) = \left[\frac{dC_{\mathrm{creep}}(t)}{d\ln t} - \frac{d^2C_{\mathrm{creep}}(t)}{d(\ln t)^2}\right]_{t=2\tau} \tag{D5}$$

を用いクリープ曲線から直接求めたスペクトルである。同様に，緩和スペクトル $H(\tau)$ は緩和弾性率から次式により求められる；

$$H(\tau) = \left[-\frac{dE_{\mathrm{relax}}(t)}{d\ln t} + \frac{d^2E_{\mathrm{relax}}(t)}{d(\ln t)^2}\right]_{t=2\tau} \tag{D6}$$

[A2] B. Gross, *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*, Hermann (1953)

[A3] 齋藤信彦, *高分子物理学*, 裳華房, (1967)

[A4] 山本三三三, *物体の変形学*, 誠文堂新光社, (1972)

[A5] F. Schwarzl, A.J. Staverman, *Physica*, **18**, 791 (1952)

[A6] F. Schwarzl, A.J. Staverman, *Appl. Sci. Res.,* **A4**, 127 (1953)

[A7] 岡野光治, *物性論研究*, **2[3]**, 493 (1958)

APPENDIX E

圧子力学の歴史

(1) 産業革命と熱力学・連続体力学との関わり

19 世紀初頭，イギリスを中心に産業革命が本格化する中で，蒸気機関車・蒸気船の実用化や紡織産業等々の技術革新が相次ぎ，これらの技術・産業を支えるための製鉄技術・鉄鋼産業が開花する。さらに，鉄鋼産業を支えるコークス製造技術が確立する中で，ウェールズ地方の炭鉱から製鉄産業の中心であったグラスゴー・マンチェスターまで石炭を運ぶ鉄路・橋梁等の鉄道網が急速に整備された。

産業革命の中核をなした熱機関に関わる熱力学の基礎と体系化に多大の貢献をした天才達(カルノーサイクルで広く知られる N.L.S. Carnot (1796-1832)を始め，B.P.E. Clapeyron (1799-1864), J.P. Joule (1818-1889), H.L.F. von Helmholtz (1821-1894), R.J.E. Clausius (1822-1888), W. Thomson (Load Kelvin) (1824-1907), J. W. Gibbs (1839-1903), L.E. Boltzmann (1844-1906), W.H. Nernst (1864-1941))，そして，蒸気機関車・鉄路・鉄橋等の巨大構造物の強度設計に資する連続体力学(continuum mechanics)の礎を築いた天才達（T. Young (1773-1829), S.D. Poisson (1781-1840), C-L. Navier (1785-1836), A. Caucy (1789-1857), G. Green (1793-1841), G. Lame (1795-1870), B.S. Saint-Venant (1797-1886), F. Neumann (1798-1895), G.G. Stokes (1819-1903), J.C. Maxwell (1831-1879), J. Bauschinger (1834-1893), J.V. Boussinesq (1842-1929), W. Voigt (1850-1919), H. Hertz (1857-1894)）の出現は，ある意味で歴史的必然であったとも言える。

Thomas Young
(1773-1829)

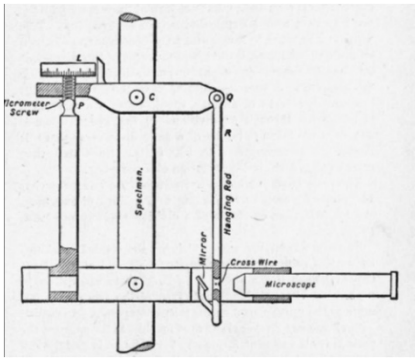
Simeon Denis Poisson
(1781-1840)

James Clerk Maxwell
(1831-1879)

(2) 産業革命期における硬度計測の役割

「弾性」,「強度」，および「塑性」の試験評価法開発と材料物理学的探究は産業革命を支えた鉄鋼材料を中心とした工業材料開発の中心課題であった。R. Hooke (1635-1703)や T. Young の先駆的研究により,「弾性」に関しては当時その試験評価法はほぼ確立していた。一方，産業革命中期（19 世紀中期)，「強度」に関する材料物理学的解釈・試験評価法は未だ確立しておらず，W. Weibull (1887-1979)の確率論的破壊理論や A.A. Griffith (1893-1963)の確定論的破壊理論の出現を見ていない。また，上述したように，蒸気機関車・鉄路の整備に伴い機関車の車輪/軌道（レール）間の接触

問題，特に鉄鋼材料の塑性変形・摩耗現象に重要な役割を果たす「塑性」の材料物理学的解釈および計測技術の確立は急務ではあった。しかし，塑性の概念やその試験評価に関する研究は端緒にもついておらず，唯一，後にバウシンガー効果(Bauschinger effect)として広く知られている J. Bauschinger の論文(1886)により，弾性限界の存在と非可逆的塑性変形現象が明らかにされ始めた段階であった。このような状況下にあって，実用的な観点から塑性を評価するための極めて重要な工業的手法として，各種の「押し込み硬度(indentation hardness)」測定法が提案され広く用いられるようになる。しかし，押し込み硬度が如何なる力学物性を表しているかの材料物理学的な解釈が確立するまでには更に一世紀余の時間が必要であった。

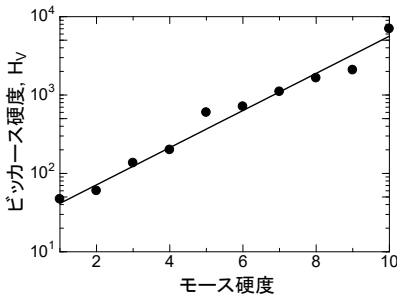


Bauschinger-Ewing 伸長計測顕微鏡（歪測定精度：$\varepsilon \approx 2.5\times10^{-6}$）

(3) 押し込み硬度の計測技術と弾塑性圧子力学の歴史

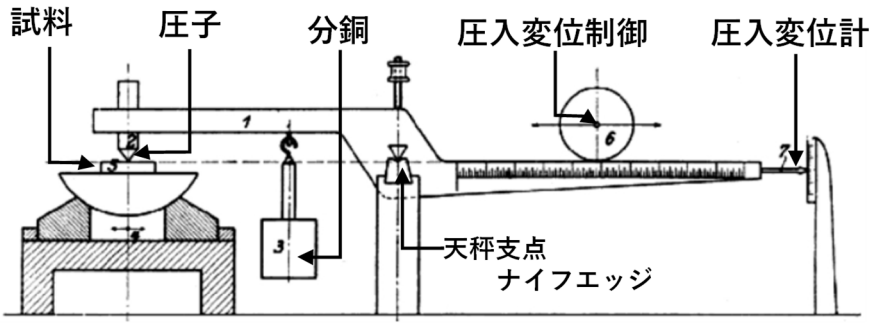
主に鉱物の硬さを分類評価するため F. Mohs (1773-1839)により導入されたモース硬度（Mohs hardness）は，いわゆる「引っ掻き硬度(scratch hardness)」であり，圧子力学で対象となる「押し込み硬度」とは異なる。モース硬度は最も柔らかい鉱物として滑石($Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$)の硬度を「スケール 1」と定義し，最も硬い鉱物としてダイヤモンド(C)の硬度を「スケール 10」とした 10 段階相対スケール硬度である。モース硬度と押し込み硬度との間には強い正の相関が存在する一方で，押し込み硬度に見られるような定量的絶対硬度としてモース硬度を扱うことはできない。

1890 年，J.A. Brinell (1849-1925)により提案された Brinell 試験法は鉄鋼材料の硬さを定量評価するために導入された。提案された標準的試験法では，直径 10mm の鋼球を 3t の荷重(P)で試験材料に押し付けた際に形成される残留圧痕の全表面積(S)を用い，P/S の値として Brinell 硬度 HB は定義され，現在も広く用いられている。Brinell 硬度試験法の開発に続き A. Martens（1898）が当時としては画期的とも言える，そして現在の計装化インデンターの先駆けとも言える「引き掻き・圧入硬度計測装置」を開発した。この硬度計測装置では圧子の圧入過程における荷重 P とその際の圧入深さ h との関係，すなわち P - h 負荷曲線を計測することができ，最大圧入荷重 P_{max} と最大圧入深さ h_{max} の値から押し込み硬度を求める手法が提案された。この硬度指数は現在，Martens 硬度 HM あるいは Universal Hardness HU として広く用いられている。



モース硬度とビッカース硬度との相関性

Brinell 硬度や Vickers 硬度に代表される多くの硬度指数に見られるように，圧子徐荷後に残留する「圧痕」の表面積を用いて硬度を算出する試験手法が「常識」であった時代に，最大圧入荷重下において硬度を算出す Martens 硬度(indentation hardness under load)の概念とその試験手法は当時としては画期的なものであった。

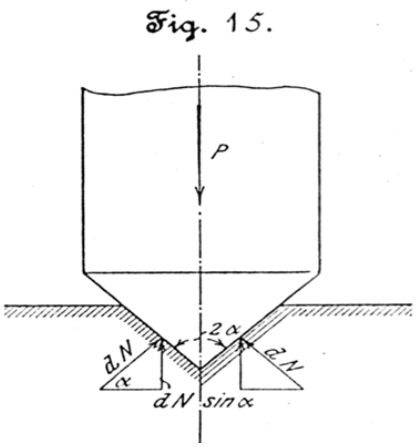


Martens 硬度計

20 世紀に入り各種の高機能材料が開発されるに従い，球形圧子を用いる Brinell 試験法が高硬度材料の硬度評価試験には適してはいないこともあり，1923 年，R. Smith と G. Sandland による四面ピラミッド形状のダイアモンド圧子を用いた硬度試験方法が提案され，1925 年に Vickers 社から「Vickers 硬度計測試験装置」として市販された。第 5 章で詳述したように Brinell 硬度試験法との整合性を図るために Vickers 四面ピラミッド圧子の面傾き角度に工夫が凝らされている（図 5.4 参照）。この圧子形状に関する設計思想は圧子排除体積等価性の考えに基づき，1950 年，E.S. Berkovich により提案された Berkovich 圧子に引き継がれている。

歴史的に, Brinell 硬度 *HB* や Vickers 硬度 *HV* は圧入荷重を圧痕の「**全表面積** S」で除した硬度指数として定義・算出される。一方，1908 年，E. Meyer は圧入荷重をその荷重における「**圧子接触投影面積** A」で除した値，すなわち圧入荷重下で生じている「**平均接触圧力」として硬度を定義することの材料物理学的意義と重要性を初めて明らかにした**。材料表面への圧子圧入過程において，圧子側面に作用する法線応力成分のうち圧入軸方向の分力のみが圧入荷重 P に寄与する事実から，硬度の算出にあたっては全接触面積では無く接触投影面積を用いることの有用性を示した。以降，任意形状を有する軸対称圧子の圧入試験において，圧入荷重 P を

圧子接触投影面積 A で除した値として定義される硬度は Meyer 硬度 H_{M} と称され現在に至っている。幾何相似性を有する円錐・ピラミッド圧子とは異なり球形圧子の Meyer 硬度 H_{M} は本文中でその詳細を論じたように圧子の圧入深さに依存して硬度が変化してしまう。E. Meyer は，球形圧子の圧入に関する幾何相似則について考察を行い，$H_{\mathrm{M}} = f(d/D)$（D：用いた球圧子の直径；d：圧入により生じた投影接触円の直径）の関係が成立することを明らかにした（Meyer の幾何相似則）：直径 D を異にする任意の大きさの球圧子を特定の弾塑性体に圧入した際に生じる投影接触円直径 d の値が比 d/D の値で一定になるようにして求めた Meyer 硬度は用いた球圧子のサイズ D に依存することなく一定値を取る。



E. Meyer, *Zeit. Verein. Deutsch. Ing.* **52**,740(1908)

20 世紀初頭において硬度は塑性の尺度として広く認識されてはいたが硬度 H_{M} と降伏応力 Y との定量的な関係については明らかにされていなかった。1920 年代に入り C. Prandtle や R. Hill は完全塑性体への二次元平端圧子の圧入過程で生じる圧子近傍における塑性滑り現象に「すべり線場理論(slip-line field theory)」を適用し $H_{\mathrm{M}} = c \cdot Y$；$c = 2.57$ の関係が存在することを明らかにした。その後，1960～1970 年代にかけて D. Tabor を始めとする多くの研究者により精密な圧子力学実験や有限要素数値解析等が行われた結果，拘束因子 c の値は，圧子形状や圧子接触面摩擦係数等に依存し，$2.5 \le c \le 3.2$ の値をとることが明らかにされた。

N.A. Stilwell, D. Tabor (1961)は，金属材料の球形圧子圧入試験を行い，P -h負荷-徐荷履歴曲線の計測の重要性を指摘し，徐荷曲線から弾性率の定量評価が可能であることを示した。これらの知見を基に，D. Newey, M.A. Wilkins, H.M. Pollock (1982)は現在の汎用計装化インデンテーション計測装置の原形とも言える計測装置を開発しインデンテーション法がミクロ・ナノ領域での各種力学物性計測・評価において極めて重要な試験手法となり得ることを明らかにした。

上述したように「完全塑性体」の Meyer 硬度 H_{M} は降伏応力 Y を定量的に表す尺度となる。一方，弾性変形の寄与を無視することのできない「弾塑性体」の Meyer 硬度 H_{M} を弾性率 E' と降伏応力 Y を用いて表現する試みは，いわゆる「キャビティーモデル (cavity model)」を用い球形圧子については R. Hill (1950)により，楔形圧子については K.L. Johnson (1970)により成功を収め，「弾塑性域」での Meyer 硬度 H_{M} を塑性歪（plastic index; $PI\left(=\varepsilon_I E'/cY\right)$）

の関数として半定量的に記述することが可能となった。一方，M. Sakai(2010)は排除体積加成則理論（additivity principle of the indentation-excluded-volume）を提案し，「完全弾性域 - 弾塑性域 - 完全塑性域」に渡る全領域において，H_M を PI の関数として定量記述することを可能とした。

(4) 弾性圧子力学，粘弾性圧子力学の理論構築

現在の弾性圧子力学理論は，H.R. Hertz が 1882 年に表した論文

“ Über die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elastic solids)”, J. reine und angewandte Mathematik, 92, 156-171

に，その歴史的原点を置く。Hertz は半径および弾性率を，それぞれ，異にする二つの球体を外部荷重 P により接触させた際に生じる接触点近傍における弾性変形 u_z と接触面での接触圧力分布 $p(r)$ を解析解として導くことに成功し，現在の弾性圧子力学の基礎を築いた。Hertz 理論に続くこと僅か 3 年後，1885 年，J.V. Boussinesq はポテンシャル理論に基づき，Hertz 接触問題を含む，より一般的な弾性圧子力学理論を展開した。しかし，各種の形状を有する軸対称圧子圧入に関する Boussinesq 接触問題の解析解は 1930 年代に入り，A.E.H. Love により初めて明らかにされ，引き続き 1960 年代に，本書で詳述した Hankel 変換を用いた解析解が I.N. Sneddon により与えられた。

1940 年代に入り各種の高分子材料開発が活発化する中にあって，P.J. Flory や J.D. Ferry 達の研究を中心に高分子粘弾性論・レオロジーが著しい発展を遂げる。時間依存性を示す粘弾性現象への圧子力学理論の展開は，「弾性-粘弾性対応原理」を Hertz 理論に適用した J.R.M. Radock(1957)により，その端緒がきられた。Radock の粘弾性圧子力学理論は，1960 年代以降，S.C. Hunter，M. Sakai，W.H. Yang 達により球形圧子以外の各種軸対称圧子を対象とした粘弾性圧子力学理論構築へと発展を遂げる。

Heinrich Rudolf Hertz
(1857-1894)

Joseph Valentin Boussinesq
(1842-1929)

【索　引】

【A】

アクリル樹脂(acrylic resin) 146, 148
圧入荷重(indentation load) 16, 29, 81,114, 167
　深さ(penetration depth) 16, 23, 42, 68, 90
　歪 (indentation strain) 25, 44, 73
　仕事(work-of-indentation) 42, 135
圧痕(residual impression) 30, 119, 138, 167
圧子(indenter)
　Berkovich 17, 38, 40, 65, 73, 102, 113
　Brinell, 球形(spherical) 17, 38, 113, 166
　円錐(cone) 22, 32, 40, 65, 77, 83, 101
　円柱(cylindrical) 19, 31, 59, 66
　曲率半径(radius of curvature) 113, 150
　幾何相似性(geometrical similarity) 23, 32, 57, 68, 104, 121, 132
　サファイア(sapphire)　125, 140
　接触半径(contact radius) 17, 28, 34, 106
　接触面積(contact area) 22, 35, 57, 72, 97, 117, 124, 126, 131, 143
　ダイヤモンド(diamond) 30, 113, 125
　軸対称(axial symmetry) 10, 17, 57, 101
　Knoop 132, 134
　排除体積(excluded volume)
　　排除体積加成則(additive rule of excluded volume) 35, 97, 126, 150
　Rockwell 17, 32
　Vickers 17, 38, 43, 57, 104, 113, 132
　Vickers/Berkovich 等価円錐 38, 73, 102
圧子力学(indentation contact mechanics)
　数値(numerical-) 65, 101, 111
　弾性(elastic) 17
　弾塑性(elastoplastic) 30
　粘弾性(viscoelastic) 57, 93
網目修飾剤(network modifier)140
暗視野法(dark-field method) 125
　→明視野法

【B】

Boltzmann 重畳積分(convolution integral) 52, 161
Boussinesq 接触問題(contact problems) 85, 111, 169
Beltrami-Michell 方程式 7, 11
Bessel 関数 (Bessel function) 13, 158

【C】

Carson 変換 (Carson transform) 53
Cavity モデル(cavity model) 34
Chebyshev 級数 (Chebyshev polynomials) 88
遅延時間 (retardation time) 45, 81, 141
窒化ケイ素(silicon nitride) 40, 126, 132, 139
調和関数(harmonic function) 9
　重調和方程式(bi-harmonic equation) 10, 13

【D】

代表降伏応力(representative yield stress) 108
　代表塑性歪(representative plastic strain) 108
弾性(elasticity)
　限界(elastic limit) 25, 29, 107, 166
　回復(elastic recovery) 31, 39, 104, 116, 123, 136-139
弾性係数 (elastic coefficient) 6, 47

弾性率 (elastic modulus) 7, 29-40
ガラス(瞬間) (glass modulus) 46, 55, 94, 110
擬(pseudo modulus) 46-53, 162
体積(bulk modulus) 27, 54
ずり（せん断）(shear modulus) 7, 25, 54
平衡 (equilibrium modulus) 46, 50, 64, 94
ラメ定数 (Lame constant) 11
ヤング率 (Young's modulus) 6, 18, 23, 54, 67
有効(effective elastic modulus) 84, 98,148
弾性体(elastic body) 6
線形(linear-) 10
弾塑性(elastoplasticity) 25, 30-43, 74, 97, 108
弾性-粘弾性対応原理(elastic-viscoelastic corresponding principle) 47, 53, 57, 77, 93, 109, 127

【E】
円柱座標(cylindrical coordinate) 4, 10-13, 153-159
エンタルピー(enthalpy) 25, 144
エントロピー(entropy) 25

【F】
Field-Swain 近似(F-S approximation) 106, 107
FEM, FEA 29, 101-103, 109-112
Fredholm 積分方程式(Fredholm integral equation) 88, 98, 111, 148

【G】
ガラス材料，ガラス状固体(glass, glassy solids) 40, 44, 55, 117
剛体(rigid body) 87, 91, 155
Green 関数(Green function) 85, 111
ガラス転移温度(glass transition temperature) 44, 128, 140-146
凝固点;結晶点(freezing point; crystallization point) 44

【H】
Hankel 変換(Hankel transform) 13-18, 88,159
非圧縮性弾性体(incompressible elastic body) 34, 54, 102
非圧縮性粘弾性体(incompressible viscoelastic body) 56, 122
非晶質(amorphous) 44, 140
セレン(amorphous selenium) 128, 143-145
被膜/基板・基材複合体(film/substrate composite) 83, 88, 94, 111, 146
歪(strain) 1, 6, 8
エネルギー(strain energy) 27, 41, 68
硬化則(rule of strain-/work -hardening) 107
伸長(elongation) 1, 6, 25-27, 108
ずり（せん断）(shear strain) 1, 7, 25-28 54, 110, 154
体積(bulk strain) 11
法線(normal strain) 154
表面付着力 65-82, 149-151
表面張力，表面エネルギー 21, 33, 68, 75
負荷徐荷曲線(loading-unloading curve)
履歴曲線(hysteresis curve) 38-42, 103, 116-119, 134, 137-150
負荷係数，徐荷係数(loading-, unloading-coefficient) 104, 105
Hooke 則(Hooke's law) 6

付着靭性値 74-76, 149
平衡方程式
(eq. of mechanical equilibrium) 3-10, 156
平面歪(plane strain) 7-12
ヤング率(Young's modulus in plane strain) 18, 23, 57, 102
Hertz 理論，Hertz 接触(Hertz theory; Hertzian contact) 20-22, 28, 102, 145, 169
変位勾配(displacement gradient) 1, 85
変形(deformation) 1
法線・伸長(normal; elongational) 1, 25, 155
ずり（せん断）(shear) 1-8, 25, 155

【I】

移動因子(shift factor) 75-76, 143-144
インデンテーション(indentation)
計装化(instrumented indentation) 31, 57, 71, 99, 114-146

【J】

JKR 理論 65-80, 149
時間-温度換算則(time-temperature superposition rule) 143
自由エネルギー(free energy)
Gibbs(Gibbs free energy) 25
徐荷スティッフネス(unloading stiffness) 116, 149-150

【K】

加工硬化(work-hardening) 107
→歪硬化則
荷重(load, force) 1
過冷液体(supercooled liquid) 44
完全塑性体(perfectly plastic body) 33, 40, 76, 107, 135, 168
完全弾性体(perfectly elastic body) 6, 17, 23, 31-54, 65-76
緩和時間(relaxation time) 45, 50, 94, 141
緩和弾性率(relaxation modulus) 48-80, 93, 110
ずり(relax. shear modulus) 54, 110
記憶関数(memory function) 52, 163
基板・基材物性(substrate properties) 83
金属(metals)
アルミ(aluminum) 45, 134
銅(cupper) 40, 43, 134
クリープ(creep)
関数(creep function) 48-63, 81, 123, 150
コンプライアンス(creep compliance) 48, 121-130, 141, 163
変形(creep deformation) 44, 80, 123, 128
クリープアップ(creeping-up) 110, 122, 145
計装化インデンター(instrumented indenter) 58, 106, 110, 141, 166
顕微インデンター(indentation microscope) 31, 57, 110, 125-130, 141, 146-150
拘束因子(constraint factor) 33, 108, 119, 168
構成方程式(constitutive equation)
→粘弾性構成式(viscoelastic)
硬度(hardness)
Brinell 30, 38, 166
Meyer 30-42, 61, 75, 97-100, 118, 126, 132-139, 146-150, 168
Vickers/Berkovich 30, 38, 167
降伏応力，降伏強度(yield stress/strength) 25-43, 74, 99, 105-108, 116, 126-131, 147, 150, 168
高分子レオロジー(polymer rheology)
→ レオロジー

コンプライアンス(compliance)
→クリープコンプライアンス
躯体(frame compliance) 115-118, 125

【L】
Laplace 変換(Laplace transform)
46-53, 77, 124, 130, 160
Laplace 演算子(Laplacian operator) 7-13
Laplace 方程式(Laplace equation) 9, 13, 158
ループエネルギー(loop energy)
41-43, 133-139

【M】
膜(film, coat) 83-100, 146
厚さ(thickness of) 83-100, 146
マグネシア(magnesia, magnesium oxide)
134, 136
Meyer 硬度(Meyer hardness) → 硬度
マスターカーブ，合成曲線(master curve)
143
明視野法(bright-field method) 125
→暗視野法
メチルシルセスキオキサン($MeSiO_{3/2}$)
146
メチルメタクリレート樹脂 134
面傾き角度(inclined face-angle) 22, 32-38,
57-61, 104, 109, 113, 132-134, 167
面積因子(index of projected area)
113, 116, 132

【N】
内力(internal pressure)
→応力(stress)
粘弾性(viscoelastic)
刺激-応答理論(stimulus-response
theory) 52, 124, 160
線形(linear v.) 44, 47-61, 82, 93, 111
関数(viscoelastic function)
31, 52-55, 115, 121-131, 141-150
Maxwell モデル(Maxwell model) 45-50
Voigt モデル(Voigt model) 45-50
Zener モデル(Zener model) 45-50
Wiechert モデル(Wiechert model)
50, 163
Meyer 硬度(viscoelastic Meyer hardness)
61-64
粘弾性構成式(viscoelastic constitutive
equation) 50-58, 79, 121, 130, 160
微分型(differential c. e.) 50-58
積分型(integral c. e.) 50-58
粘度, 粘性係数(viscosity) 45, 62, 144, 162, 164

【O】
応力(stress)
ずり（せん断）(shear) 3, 4, 26-28, 157
法線(normal) 3, 7, 11, 26-27, 167
応力関数(stress function)
Airy (Airy's s. f.) 9, 12
Love (Love's s. f.) 12
Oliver-Pharr 近似(Oliver-Pharr
approximation) 106, 114, 119

【P】
パイルアップ(pile-up) 33, 39, 90, 108
→ シンクイン(sink-in)

ポアソン比(Poisson's ratio) 6-8, 28, 34, 54-57, 83, 93, 102, 110, 116, 145
ポアソン効果(Poisson's effect) 6, 54, 102, 109, 122, 126
ポリカーボネート(polycarbonate) 125, 144-148

【Q】

【R】
履歴曲線(hysteresis curve) 38, 40-42, 103, 116-119, 134-149, 168
レオロジー(rheology) 54, 142, 169
高分子(polymer r.) 54
連続体力学(continuum mechanics) 1, 165

【S】
Saint Venant 方程式(Saint Venant equation) 3, 5, 8-11
酸化マグネシウム → マグネシア
刺激-応答理論 → 粘弾性
シンクイン(sink-in) 39, 89-91
主軸(principal axis) 26
主応力(principal stress) 26-28
スペクトル(spectrum)
緩和時間(relaxation-time spectrum) 50, 141, 163
遅延時間(retardation-time spectrum) 50, 141, 163
静水圧(hydrostatic pressure) 34, 54
石英ガラス，シリカガラス(fused quartz; silica glass) 117, 126, 138, 140-142
積層複合材(laminate composites) 83-97, 111, 146-148
接触問題(contact problems) 1, 20-25, 101
接触(contact)
圧力分布(distribution of contact pressure) 17, 19, 66-69, 87-92, 169
半径(contact radius) →圧子
深さ，相対深さ(contact depth, relative c. d.) 17, 21, 39, 104-107, 114-123
摩擦(contact friction) 17, 108-109
面積(contact area) →圧子
力学(contact mechanics) 101
Sneddon 関数(Sneddon function) 22
走査プローブ顕微鏡(scanning probe microscope) 118
装置定数(apparatus/instrument constant) 115, 117, 125
ソーダ石灰ガラス(soda-lime glass) 46, 134, 137-148
ソフトマター(soft matter) 65, 72, 149
塑性(plasticity) 23, 25-43
散逸エネルギー(plastic energy dissipation) 41-43, 139
塑性歪，塑性変形能(plastic strain; plastic index) 36, 39, 76, 104-108, 116, 119, 127, 133, 168
ゾルーゲル法(sol-gel method) 146

【T】
体心力(body force) 4-10
体積膨張(volumetric expansion) 44
炭化ケイ素(silicon carbide) 43, 134

炭素・黒鉛(carbon; graphite) 138-139
ガラス状炭素(glass-like carbon; glassy carbon) 134-138, 146-148
難黒鉛化・易黒鉛化 (non-graphitizable/ graphitizable) 137-138
多結晶黒鉛(polycrystalline graphite) 138
調和方程式(harmonic equation), 重調和方程式(bi-harmonic e.) 3, 10-14, 18, 159
調和関数(harmonic function) 9-14, 88
テーラー展開(Taylor expansion) 1
適合条件式(compatibility equation) 2-5, 7-11
Tresca 規範(Tresca criterion) 26-28, 32

【U】

【V】
Van der Waals 力(Van der Waals force) 139
von Mises 規範(von Mises criterion) 27-29, 32

【W】

【X】

【Y】
Young 率(Young's modulus) → 弾性率
有限要素法，有限要素解析(finite element method/analysis) 29, 33, 37-39, 42, 65, 73, 98-112
融点(melting point) 44

【Z】
ずり傾き角度(shear angle) 2
→ 歪(strain)

本書の全部または一部を無断転載・複製することは著作権法上の例外を除いて禁じられています

© Mototsugu Sakai 2020